ECE2 – Exercices réduction

Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Les matrices A,B sont-elles diagonalisables ?

Exercice 2 (EDHEC 2010)

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par les égalités suivantes :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \quad \text{et } f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3} e_1$$

1) a) Ecrire la matrice M de f dans $\mathcal{B}$.

b) Déterminer la dimension de Im f, puis celle de Ker f.

c) Donner alors une base de Ker f, puis en déduire une valeur propre de f ainsi que le sous-espace propre associé.

d) Déterminer les autres valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.

e) En déduire que f est diagonalisable.

2) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Justifier sans calcul que P est inversible, puis déterminer la matrice D diagonale telle que : $M = PDP^{-1}$.