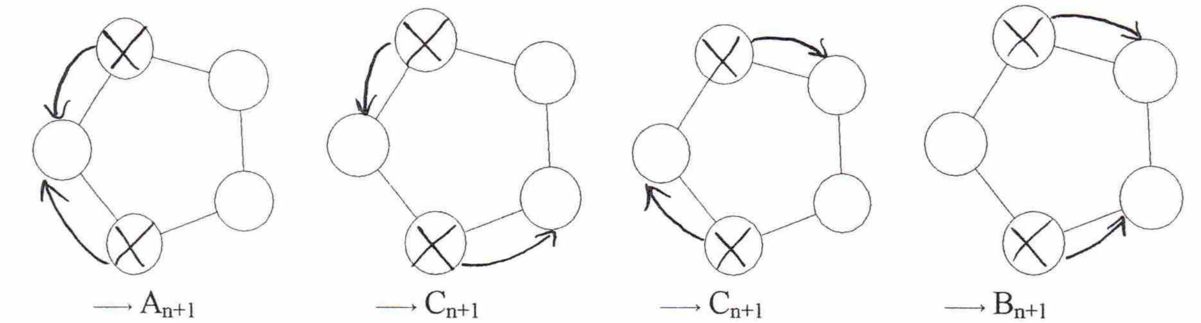
ECE1 : Correction du Devoir à la Maison n°4: ESSEC 2008

1. Chacune des personnes étant située sur un des 5 sites, la distance entre les deux est inférieure ou égale à 2. (donc égale à 0, 1 ou 2). Donc $A_n \cup B_n \cup C_n = \Omega$.
Les événements sont incompatibles, donc A_n, B_n, C_n forment un système complet d'événements.
2. A l'instant 0, P_1 est en S_1 et P_2 est en S_2 donc la distance est 1.
Donc $a_0 = P(A_0) = 0$, $b_0 = P(B_0) = 1$, $c_0 = P(C_0)\ 0$.
3. a) Si C_n est réalisé : ils sont situés à deux sites de distance.

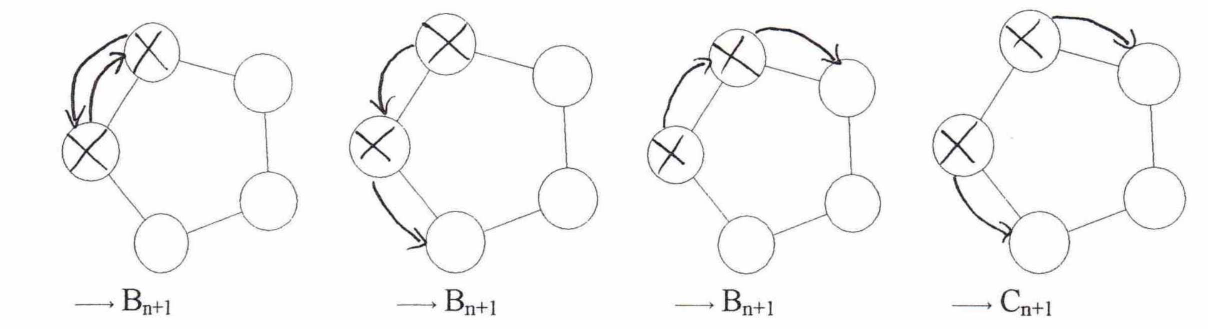


Déplacements équiprobables et indépendants, donc $P_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$

b) Si A_n est réalisé, ils se sont retrouvés, donc restent ensemble. Donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$.

c) D'après le a : $P_{C_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ $\qquad P_{C_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$

De même que dans le b), $P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$.
Si B_n est réalisé : distance entre les deux de 1.



$P_{B_n}(A_{n+1}) = 0 \quad P_{B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{3}{4} \quad P_{B_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$

4. (A_n, B_n, C) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, $a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1})$

$$= a_n \times 1 + b_n \times 0 + c_n \times \frac{1}{4} = a_n + \frac{1}{4} c_n$$

De la même manière, $b_{n+1} = P(B_{n+1}) = a_n \times 0 + b_n \times \dfrac{3}{4} + c_n \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} b_n + \dfrac{1}{4} c_n$

$c_{n+1} = P(C_{n+1}) = a_n \times 0 + b_n \times \dfrac{1}{4} + c_n \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} b_n + \dfrac{1}{2} c_n$

5) a) $b_{n+2} = \dfrac{3}{4} b_{n+1} + \dfrac{1}{4} c_{n+1} = \dfrac{3}{4} b_{n+1} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4} b_n + \dfrac{1}{2} c_n\right) = \dfrac{3}{4} b_{n+1} + \dfrac{1}{16} b_n + \dfrac{1}{8} c_n$

Or $b_{n+1} = \dfrac{3}{4} b_n + \dfrac{1}{4} c_n \Leftrightarrow c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$

Donc $b_{n+2} = \frac{3}{4} b_{n+1} + \frac{1}{16} b_n + \frac{1}{2} b_{n+1} - \frac{3}{8} b_n = \frac{5}{4} b_{n+1} - \frac{5}{16} b_n$.

b) b_n est une suite linéaire récurrente d'ordre 2 à coefficients constants.

Equation caractéristique : $x^2 = \frac{5}{4} x - \frac{5}{16} \Leftrightarrow 16x^2 - 20x + 5 = 0$

$\Delta = 400 - 4\times16\times5 = 80$ deux racines $x_1 = \frac{20 + \sqrt{80}}{32} = \frac{20 + 4\sqrt{5}}{32} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$ et $x_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$

Il existe deux réels λ et μ tels que : $b_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$

c) $b_{n+1} = \lambda\,\alpha^{n+1} + \mu\beta^{n+1}$

Donc $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n = 4(\lambda\,\alpha^{n+1} + \mu\beta^{n+1}) - 3(\lambda\alpha^n + \mu\beta^n) = \lambda\alpha^n\,(4\alpha - 3) + \mu\beta^n(4\beta - 3)$

$= \lambda\,\alpha^n \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \mu\,\beta^n \times \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}$

(d) A_n, B_n, C_n forment un système complet d'événements, donc $a_n + b_n + c_n = 1$.

Donc $a_n = 1 - \lambda\,\alpha^n - \mu\,\beta^n - \lambda\,\alpha^n \frac{\sqrt{5} - 1}{2} - \mu\,\beta^n \times \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}$

$= 1 - \lambda\alpha^n \left(1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) - \mu\,\beta^n \left(1 - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right) = 1 - \lambda\,\alpha^n \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \mu\,\beta^n \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

6) $-1 < \alpha < 1$ et $-1 < \beta < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \beta^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 0$.