ECE1 : Devoir Surveillé n°9
Mercredi 23 Mai 2012

Le barème est donné à titre indicatif. Durée : 3 heures

Exercice 1 ***(3 points)***

Pour tout $n \geq 1$, on pose $a_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$

Montrer que les séries $\sum\limits_{n \geq 1} a_n$, $\sum\limits_{n \geq 1} na_n$, $\sum\limits_{n \geq 1} n^2a_n$, $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{a_n}{n!}$ convergent et déterminer leurs sommes respectives.

Exercice 2 ***(5 points)***

Pour $n \geq 3$, on pose : $u_n = \dfrac{1}{n^3}$ et $v_n = \dfrac{1}{n(n-1)(n-2)}$

On considère la série $\sum\limits_{n \geq 3} u_n$ de somme partielle U_N et la série $\sum\limits_{n \geq 3} v_n$ de somme partielle V_N.

1) a) Montrer que $\forall\, n \geq 3$, $v_n = \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}\right) + \left(\dfrac{1}{n-2} - \dfrac{1}{n-1}\right)\right)$

b) En déduire que $\forall\, N \geq 3$, $V_N = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(N-1)} + \dfrac{1}{2N}$.

c) Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 3} v_n$ est convergente et calculer $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} v_n$.

d) Montrer que $\forall\, N \geq 3$, $V_N \leq \dfrac{1}{4}$

2) a) Etudier le sens de variation de la suite (U_N).
b) Montrer que $\forall\, N \geq 3$, $U_N \leq V_N$.

c) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geq 3} u_n$ converge et que $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3} \leq \dfrac{1}{4}$.

3) Ecrire une fonction Pascal dont l'intitulé sera :

```
function U(N:integer):real;
```

qui a à un entier N associe le nombre $U_N = \sum\limits_{k=3}^{N} \dfrac{1}{k^3}$.

Exercice 3 ***(2 points)***

Soit λ un réel strictement positif. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.
1) Rappeler l'expression de $P(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, ainsi que l'espérance et la variance de X.
2) On pose $Y = X + 2$.
Déterminer l'espérance et la variance de Y.

3) Soit Z la variable aléatoire définie par : $Z = \dfrac{1}{1+X}$.

Montrer que Z admet une espérance et que $E(Z) = \dfrac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$

Exercice 4 ***(3,5 points)***

Une urne contient 4 boules : trois boules rouges et une boule bleue.
Deux joueurs A et B jouent selon les règle suivantes :
Le joueur A tire une boule :
_ s'il obtient la boule bleue, il gagne.
_ sinon, le joueur B tire une boule : s'il obtient la boule bleue, il gagne.
Si personne n'a gagné, on remet les deux boules dans l'urne et on recommence l'expérience.
On appellera "essai" l'ensemble des deux tirages.
Pour $k \geq 1$, on note les événements :

A_k = "Au k-ème essai, A gagne"
A'_k = "Le jeu se poursuit jusqu'au k-ème essai, et A gagne au k-ème essai"
B_k = "Au k-ème essai, B gagne"
B_k' = "Le jeu se poursuit jusqu'au k-ème essai, et B gagne au k-ème essai"
C_k = "Au k-ème essai, le jeu se poursuit"
C_k' = "Le jeu se poursuit plus de k essais"

1) a) Pour $k \geq 1$, déterminer $P(C'_k)$.
b) En déduire la probabilité que le jeu se termine.
2) a) Montrer que $\forall\ k \geq 1$, $P(A'_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{4}$
b) Déterminer la probabilité que A gagne le jeu.
3) Conclure.

Exercice 5 ***(6,5 points)***

On pourra utiliser la formule suivante : $\forall q \neq 1,\ \forall n \geq 2,\ \sum_{i=2}^{n} (i-1) \times q^i = q^2 \times \frac{1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n}{(1-q)^2}$

On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face avec une probabilité 1/2. On note P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient pile (resp. face) au k-ème lancer". Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Soit Z la variable aléatoire qui est égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois "face". Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance

Partie B

On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k - 1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

1. a) Calculer $P(X = 2)$. En remarquant que $(X = 3) = P_1P_2F_3 \cup F_1P_2F_3$, calculer $P(X = 3)$.
b) Ecrire, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, l'événement $(X = k)$ comme réunion d'événements incompatibles.
c) En déduire que $P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
d) Déterminer $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k)$. En déduire $P(X = 0)$.
2. Montrer que X a une espérance E(X), puis la calculer.
3. a) Soit $k \geq 2$. A l'aide d'une somme, déterminer $P(X \leq k)$.
b) Pour $k \geq 1$, en exprimant l'événement $(X > k)$ à l'aide de $(k + 1)$ événements élémentaires, déterminer $P(X > k)$. Vérifier la cohérence de vos résultats.