ECE1 : Correction du D.S. n°9

Exercice 1

$-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc les 3 premières séries convergent et

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ = (avec n' = n – 1) $\sum_{n'=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n'} = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{(1-1/3)^2} = \frac{9}{4}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(n(n-1)+n)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\times\frac{2}{(1-1/3)^3} + 9$

$= \frac{1}{3}\times 2\times\frac{27}{8} + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$ $\qquad \sum_{n\geq 1}\frac{(1/3)^{n-1}}{n!} = 3\sum_{n\geq 1}\frac{(1/3)^n}{n!}$ la série converge et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n!} = 3\,(e^{1/3}-1)$

Exercice 2

1) $\forall n \geq 3, \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} = \frac{(n-1)(n-2) - 2n(n-2) + n(n-1)}{n(n-1)(n-2)}$

$= \frac{n^2 - 3n + 2 - 2n^2 + 4n + n^2 - n}{n(n-1)(n-2)} = \frac{2}{n(n-1)(n-2)} = 2v_n$ d'où la formule

b) $\forall N \geq 3, V_N = \sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1} + \sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2} - \sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N-1}\right) + \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N-2}\right) - \left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N-2}+\frac{1}{N-1}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{N-1}\right)$ (sommes télescopiques) $= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N-1)} + \frac{1}{2N}$

Ou : Par récurrence :

_ pour N = 3 : $V_N = \sum_{n=3}^{3} v_n = v_3 = \frac{1}{6}$ $\qquad \frac{1}{4} - \frac{1}{2(3-1)} + \frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ Vraie pour n = 3.

_ supposons que $V_N = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N-1)} + \frac{1}{2N}$ alors

$V_{N+1} = \sum_{n=3}^{N+1} v_n = V_N + v_{n+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N-1)} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{N} + \frac{1}{2(N-1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{2(N+1)}$

donc vraie au rang N + 1. Donc $\forall N \geq 3, V_N = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N-1)} + \frac{1}{2N}$

c) $\lim_{N\to+\infty} v_N = \frac{1}{4}$ donc la série $\sum_{n\geq 3} v_n$ converge et $\sum_{n=3}^{+\infty} v_n = \frac{1}{4}$.

d) $\forall N \geq 3, V_N = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N-1)} + \frac{1}{2N} = \frac{1}{4} + \frac{-N+N-1}{2N(N-1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2N(N-1)} \leq \frac{1}{4}$

2) a) Pour tout $n \geq 3$, $U_{N+1} - U_N = \frac{1}{(N+1)^3} \geq 0$ donc la suite (U_N) est croissante.

b) $\forall n \geq 3$, $n(n-1)(n-2) \leq n^3$ donc $\frac{1}{n(n-1)(n-2)} \geq \frac{1}{n^3} \Leftrightarrow v_n \geq u_n$. Donc $\sum_{n=3}^{N} u_n \leq \sum_{n=3}^{N} v_n \quad U_N \leq V_N$

c) $\forall N \geq 3$, $U_N \leq V_N \leq \frac{1}{4}$. Donc (U_N) est croissante et majorée par 1/4, donc U_N converge et

$\lim_{N\to+\infty} u_N \leq \frac{1}{4}$. Donc la série $\sum_{n\geq 3} u_n$ converge et $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{4}$.

```
function U(N:integer):real;
var k:integer;
    s : real;
begin
    s := 0;
    for k := 3 to n do s := s + 1/(k*k*k);
    U := s;
end;
```

Exercice 3

1) $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $E(X) = \lambda$ $V(X) = \lambda$.

2) Y est une fonction affine de X, donc : $E(Y) = E(X) + 2 = \lambda + 2$. $V(Y) = 1^2\ V(X) = \lambda$

3) $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k+1} P(X = k) = \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!(k+1)} = \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k+1)!}$ (avec k' = k+1) $\displaystyle = \sum_{k' \geq 1} \frac{\lambda^{k'-1} e^{-\lambda}}{k'!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k' \geq 1} \frac{\lambda^{k'}}{k'!}$

On reconnaît la série exponentielle. La série converge absolument, donc, d'après le théorème de transfert Z admet une espérance et $\displaystyle E(Z) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k'=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$.

Exercice 4

1) a) Probabilité de continuer à une tentative : $P(R_1 \cap R_2) = \dfrac{3 \times 2}{4 \times 3} = \dfrac{1}{2}$.

$C'_k = C_1 \cap \ldots \cap C_k$. Les essais sont indépendants (remise des boules).

$P(C'_k) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$

b) Soit C = "le jeu se continue indéfiniment". Alors $C = \bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k'$

Si le jeu se poursuit après k+1 tirages, il s'est poursuivi après k tirages. Donc $C_{k+1}' \subset C_k'$.

La suite (C_k') est une suite décroissante d'événements. D'après la propriété de la limite monotone :

$P(\bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k') = \lim\limits_{k \to +\infty} P(C'_k)$

$P(C) = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$. Donc le jeu se termine presque sûrement.

2) a) $A'_k = C_1 \cap \ldots \cap C_{k-1} \cap A_k$.

Les essais sont indépendants, donc $P(A'_k) = \dfrac{1}{2} \times \ldots \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{4}$

b) A = "A gagne le jeu" $A = A'_1 \cup A'_2 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A'_k$ (disjoints)

Donc $\displaystyle P(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$ (i = k-1)

$= \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Donc $P(B) = 1 - P(A) = \dfrac{1}{2}$. A et B ont la même chance de gagner.

Exercice 5

Partie A 1. A chaque lancer, on fait "face" avec la probabilité 1/2. Les lancers sont indépendants, Z est le rang du premier "face".

Donc $Z \longrightarrow G(1/2)$. $E(Z) = \dfrac{1}{1/2} = 2$ $V(Z) = \dfrac{1 - 1/2}{(1/2)^2} = 2$

Partie B

1. $P(X = 2) = P(P_1F_2) = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $P(X = 3) = P(P_1P_2F_3 \cup F_1P_2F_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

b) $(X = k) = P_1\ldots P_{k-1}F_k \cup F_1P_2\ldots P_{k-1}F_k \cup \ldots \cup F_1\ldots.F_{k-2}P_{k-1}F_k$

c) Il y a k-1 événements incompatibles donc $P(X = k) = (k-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{k-1}{2^k}$

d) $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} =$ (avec k' = k – 1) $\sum_{k'=1}^{+\infty} \frac{k'}{2^{k'+1}} = \frac{1}{4} \sum_{k'=1}^{+\infty} k' \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k'-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1-1/2)^2} = 1$

Or $P(X = 0) + \sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$ donc $P(X = 0) = 0$.

2. $\sum_{k \geq 2} kP(X = k) = \sum_{k \geq 2} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{4} \sum_{k \geq 2} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc la série converge absolument.

Donc E(X) existe et $E(X) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{4} \times 2 \times 8 = 4$.

3. a) $P(X \leq k) = \sum_{i=2}^{k} P(X = i) = \sum_{i=2}^{k} \frac{i-1}{2^i} = \sum_{i=2}^{k} (i-1)\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{(1/2)^2}{(1-1/2)^2}\left(1 - k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + (k-1)\frac{1}{2^k}\right)$

$= 1 - \frac{2k}{2^k} + \frac{k-1}{2^k} = 1 - \frac{k+1}{2^k}$

b) $(X > k) =$ "pile n'est pas suivi de face lors des k premiers lancers"

$(X > k) = P_1\ldots P_k \cup F_1P_2\ldots P_k \cup F_1F_2P_3\ldots P_k \cup \ldots. \cup F_1\ldots F_k$ (k + 1 évén. incompatibles).

Donc $P(X > k) = \frac{k+1}{2^k}$ et $P(X \leq k) + P(X > k) = 1 - \frac{k+1}{2^k} + \frac{k+1}{2^k} = 1 = P(\Omega)$