E.C.E.1 Devoir surveillé n°8

Durée 3 heures. Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 - Extraits d'Ecricome 2003 ***(11,5 points)***

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de λ le système S_λ : $\begin{cases} (3-\lambda)x - 2y + 3z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \\ (2-\lambda)z = 0 \end{cases}$

n'est-il pas de Cramer ?
b) Résoudre le système pour ces valeurs de λ.
(On déterminera une base de l'ensemble des solutions).

2. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que ($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$) forment une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Montrer que la matrice P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On admet dans la suite de l'exercice que $A = PTP^{-1}$

4. a) Prouver que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un réel α_n tel que : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

On donnera le réel α_1 ainsi qu'une relation entre α_{n+1} et α_n.
b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = n2^{n-1}$.

5. Matrices commutant avec A
$M_3(\mathbb{R})$ désignant l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, on considère le sous-ensemble C(A) de $M_3(\mathbb{R})$ des matrices M telles que : AM = MA.
a. Montrer que C(A) est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
b. Pour M appartenant à $M_3(\mathbb{R})$, on pose $M' = P^{-1}MP$.
Montrer que : $AM=MA \Leftrightarrow TM'=M'T$
c. Montrer qu'une matrice M' de $M_3(\mathbb{R})$ vérifie TM'=M'T si et seulement si M' est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ où a, b et c sont trois réels.
d. En déduire que M appartient à C(A) si et seulement si il existe des réels a, b et c tels que :
$M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
e. Déterminer une base de C(A).

Exercice 2 – D'après ESSEC 2007 *(8,5 points)*

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme :

$u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0$

et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et on note

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et } T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. a) Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit AX_n.

b) En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A, X_0 et de l'entier naturel n.

2. À l'aide de la formule du binôme de Newton et de la décomposition suivante de T :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n.

3. a) Calculer P^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie).

b) Montrer que $A = PTP^{-1}$, puis exprimer X_n en fonction de T, P, P^{-1}, X_0 et l'entier naturel n.

4. Soit f l'endomorphisme de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique est : $B = A - 2I_3$.

a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. Exprimer f(X) en fonction de x, y, z.

b) Déterminer une base de Ker f. f est-elle injective ?

c) Montrer que $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im}(f)$ si et seulement si $a - b + c = 0$. f est-elle surjective ?

d) Déterminer une base de Im f.