ECE1 : Correction du D.S. n°8

Exercice 1

1) a) $\begin{cases} (3-\lambda)x - 2y + 3z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \\ (2-\lambda)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\begin{cases} x - \lambda y + 2z = 0 \\ (3-\lambda)x - 2y + 3z = 0 \\ (2-\lambda)z = 0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underset{L_2 \leftarrow (3-\lambda)L_1 - L_2}{\begin{cases} x - \lambda y + 2z = 0 \\ (\lambda^2 - 3\lambda + 2)y + (3-2\lambda)z = 0 \\ (2-\lambda)z = 0 \end{cases}}$

S_λ n'est pas de Cramer lorsque $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ou $2 - \lambda = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ (1 racine évidente) donc S_λ n'est pas de Cramer pour $\lambda = 1$ et 2.

b) Pour $\lambda = 1$: $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Le vecteur est non nul, donc c'est une base de S_1.

Pour $\lambda = 2$: $\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ -z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$ $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Le vecteur est non nul, donc c'est une base de S_1.

2) $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ b = 0 \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Donc la famille est libre. $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) Par récurrence : _ pour n = 1 $T^1 = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Si on pose $\alpha_1 = 1$: $T^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 2^1 \end{pmatrix}$

_ supposons qu'il existe un nombre α_n tel que : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Alors $T^{n+1} = T^n \times T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2^n + 2\alpha_n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$. Donc $\alpha_{n+1} = 2^n + 2\alpha_n$ convient.

Concl : Si (α_n) est définie par : $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

b) Procédons par récurrence : _ $\alpha_1 = 1$ $1 \times 2^{1-1} = 1$ donc propriété vraie pour n = 1

_ si $\alpha_n = n2^{n-1}$, alors $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n = 2n2^{n-1} + 2^n = n2^n + 2^n = (n+1)2^n$ donc la propriété est héréditaire. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = n2^{n-1}$.

5) a) _ $A \times 0 = 0$ $0 \times A = 0$ donc $0 \in C(A)$

_ si $M \in C(A)$ ($AM = MA$) et $M' \in C(A)$ ($AM' = M'A$)

alors $A(M + M') = AM + AM' = MA + M'A = (M + M')A$ donc $M + M' \in C(A)$.

_ si $M \in C(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: alors $A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)A$ donc $\lambda M \in C(A)$.

Donc C(A) est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

b) $AM = MA \Leftrightarrow PTP^{-1}M = MPTP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}(PTP^{-1}M)P = P^{-1}(MPTP^{-1})P$

$\Leftrightarrow TP^{-1}MP = P^{-1}MPT \Leftrightarrow TM' = M'T$

c) Posons $M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors $TM' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d + g & 2e + h & 2f + i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$

et $M'T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b & b + 2c \\ d & 2e & e + 2f \\ g & 2h & h + 2i \end{pmatrix}$

Donc $TM' = M'T \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2b \\ c = b + 2c \\ 2d + g = d \\ 2e + h = 2e \\ 2f + i = e + 2f \\ 2g = g \\ 2h = 2h \\ 2i = h + 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ h = 0 \\ g = 0 \\ d = 0 \\ i = e \end{cases} \Leftrightarrow M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ où a, e, f sont des réels.

d. $M \in C(A) \Leftrightarrow M' \in C(T) \Leftrightarrow M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Or $M' = P^{-1}MP \Leftrightarrow M = PM'P^{-1}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 2b & 2c + b \\ a & b & c + b \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a + 2b & 2a - 2b & -a + b + 2c \\ -a + b & 2a - b & -a + b + c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = M$$

e. $C(A) = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}$

$= \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$ avec $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b = 0 \\ 2a - 2b = 0 \\ -a + b + 2c = 0 \\ -a + b = 0 \\ 2a - b = 0 \\ -a + b + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ Donc M_1, M_2, M_3 est une base de C(A).

Exercice 2 1. a) $AX_n = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_n - v_n + w_n \\ u_n + 2v_n \\ v_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$

b) Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A\times \ldots \times AX_0 = A^n X_0$

3) Posons $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De plus $2I\times B = 2B$ et $B \times 2I = 2B$, donc d'après la formule du binôme de Newton,

$$T^n = (2I + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(2I)^{n-k}B^k = \binom{n}{0}(2I)^{n-0}B^0 + \binom{n}{1}(2I)^{n-1}B^1 + \binom{n}{2}(2I)^{n-2}B^2$$

$$T^n = 2^n I + n2^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2}B^2 = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n(n-1)2^{n-3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 8 & 4n & n(n-1) \\ 0 & 8 & 4n \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

4) a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3.\text{ Donc } P^{-1} = \begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

b) $$\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\2&1&2\\2&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix} \text{ donc } PTP^{-1} = A.$$

Donc $A^n = (PTP^{-1})(PTP^{-1})\ldots(PTP^{-1}) = PT^nP^{-1}$ $X_n = A^nX_0 = PT^nP^{-1}X_0$

4. a) $B = \begin{pmatrix}3&-1&1\\1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$ $f(X) = BX = \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y+z\\x\\y-z\end{pmatrix}$

b) $f(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x-y+z=0\\x=0\\y-z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=z\\x=0\end{cases}$ Ker $f = \left\{\begin{pmatrix}0\\z\\z\end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

Le vecteur est non nul, donc est une base de Ker f.

c) $Y = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in$ Im f si et seulement si l'équation $f(X) = Y$ admet une solution.

$f(X) = Y \Leftrightarrow \begin{cases}x-y+z=a\\x=b\\y-z=c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y-z=b-a\\x=b\\y-z=c\end{cases}$

Le système admet des solutions si et seulement si $b - a = c \Leftrightarrow a - b + c = 0$

d) Base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$: $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Donc Im f = Vect($f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$) = $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ $\quad \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ donc

Im f = $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$

Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre, donc une base de Im f.
Ou : $a - b + c = 0 \Leftrightarrow a = b - c$ (b, c inconnues secondaires)

Im f $= \left\{\begin{pmatrix}b-c\\b\\c\end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\right\} = \left\{b\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ puis idem.