

ECE1 : Devoir Surveillé n°7
Mercredi 21 Mars 2012

Le barème est donné à titre indicatif. Portables et calculatrices restent dans les sacs.

Exercice 1 (4 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Déterminer les solutions du système :
$$\begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ -x + 2y + 2z = 10 \\ 3x + 3y - 4z = -1 \end{cases}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système : $(S_\lambda) : \begin{cases} (7 - \lambda)x + 6y = 0 \\ -4x + (-3 - \lambda)y = 0 \end{cases}$

a) Déterminer pour quelles valeurs de λ ce système n'est pas un système de Cramer.

b) Résoudre ce système pour $\lambda = 1$ et pour $\lambda = 3$.

Exercice 2 (10 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{1+x}{2\sqrt{x}}$

1) a) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$

b) Etudier les limites et les branches infinies de f .

c) Déterminer f' et étudier les variations de f .

d) Montrer que $\forall x > 0$, $f''(x) = \frac{\sqrt{x}(3-x)}{8x^3}$.

Etudier la convexité de f (on précisera le point d'inflexion, ainsi que le coefficient directeur de la tangente en ce point).

e) Dans un repère d'unité 2 cm, tracer la courbe représentative de f .

$(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 2,155 \text{ et } \frac{1}{6\sqrt{3}} \approx 0,096)$

2) Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$

3) Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$

a) Montrer que g est décroissante sur $[1; +\infty[$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$

Utiliser le graphique pour déterminer une valeur approchée de α .

On admettra dans la suite que $1 \leq \alpha \leq 3$.

4) Ecrire un programme Pascal qui effectue une recherche dichotomique de α et affiche une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

5) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}} |u_n - \alpha|$, puis que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{(6\sqrt{3})^n}$

En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;1[\cup]1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que f est continue sur $[0;1[\cup]1; +\infty[$.
b) Montrer que f est dérivable en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
c) Etudier la limite de f en 1.
d) Etudier le comportement asymptotique de f en $+\infty$.
- 2) a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0;1[\cup]1; +\infty[$.
b) Déterminer $f'(x)$ pour $x \in]0;1[\cup]1; +\infty[$. Etudier les variations de f .
c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. Retrouver le résultat de la question 1b) à l'aide de cette limite.
- 3) a) Montrer que f réalise une bijection de $]1;e]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b) f^{-1} est-elle dérivable sur J ? Préciser l'expression de $(f^{-1})'$ en fonction de f^{-1} , sur l'ensemble où elle est définie.
c) Préciser la valeur de $(f^{-1})' \left(\frac{2}{\ln(2)} \right)$.