

Devoir Surveillé n°7 : Correction

Exercice 1

$$1) \begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ -x + 2y + 2z = 10 \\ 3x + 3y - 4z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ 5y + 3z = 18 \quad L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ -3y + 5z = -4 \quad L_3 \leftarrow 3L_1 - 2L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ 5y + 3z = 18 \\ 34z = 34 \quad L_3 \leftarrow 3L_2 + 5L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ 5y + 3 = 18 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 - 1 = -2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \mathcal{S} = \{(-2; 3; 1)\}$$

$$2) a) \begin{cases} (7 - \lambda)x + 6y = 0 \\ -4x + (-3 - \lambda)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + (-3 - \lambda)y = 0 \\ (7 - \lambda)x + 6y = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + (-3 - \lambda)y = 0 \\ ((-3 - \lambda)(7 - \lambda) + 24)y = 0 \quad L_2 \leftarrow (5 - \lambda)L_1 + 4L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + (-3 - \lambda)y = 0 \\ (\lambda^2 - 4\lambda + 3)y = 0 \end{cases}$$

(S_λ) n'est pas de Cramer si et seulement si $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$
donc si $\lambda = 1$ ou 3 .

b) Pour $\lambda = 1$: $\begin{cases} -4x - 4y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad y : \text{inconnue secondaire} \quad x = -y$

$S_1 = \{(-y, y), y \in \mathbb{R}\}.$

Pour $\lambda = 3$: $\begin{cases} -4x - 6y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad y : \text{inconnue secondaire} \quad x = \frac{6y}{-4} = -\frac{3}{2}y$

$S_3 = \{(-\frac{3y}{2}, y), y \in \mathbb{R}\}.$

Exercice 2

1) a) f est la somme d'une constante et d'un quotient de fonctions de classe C^2 , donc f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{x} = 0^+ \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe.

En $+\infty$ $\frac{x+1}{2\sqrt{x}} \sim_{+\infty} \frac{x}{2\sqrt{x}} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \frac{f(x)}{x} \sim_{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

La courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses en $+\infty$.

c) $\forall x > 0, f'(x) = \frac{2\sqrt{x} - \frac{x+1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{2x - (x+1)}{4x\sqrt{x}} = \frac{x-1}{4x\sqrt{x}}$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

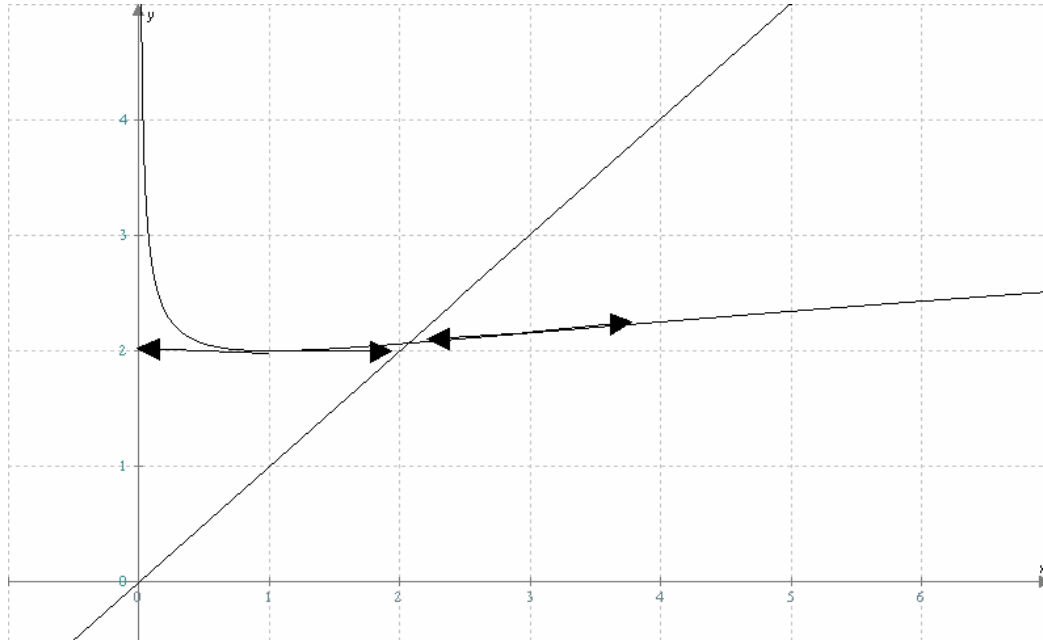
d) $(4x\sqrt{x})' = (4x^{3/2})' = 4 \times \frac{3}{2} \times x^{1/2} = 6\sqrt{x}$

Donc $f''(x) = \frac{4x\sqrt{x} - (x-1) \times 6\sqrt{x}}{16x^3} = \frac{6\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}}{16x^3} = \frac{\sqrt{x}(3-x)}{8x^3}$ du signe de $3-x$

x	0	3	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
convexité	convexe	concave	

Il y a un point d'inflexion en $(3, f(3))$

avec $f(3) = \frac{4}{2\sqrt{3}} + 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1$ et $f'(3) = \frac{2}{12\sqrt{3}} = \frac{1}{6\sqrt{3}}$



2) $f'(x) \sim_{+\infty} \frac{x}{4x\sqrt{x}} \sim_{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

x	1	3	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	0	$1/6\sqrt{3}$	0

Donc $\forall x \in [1; +\infty[\quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$. Donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$

3) a) $\forall x \geq 1, g'(x) = f'(x) - 1$ Or $f'(x) \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$ donc $f'(x) - 1 < \frac{1}{6\sqrt{3}} - 1 < 0$

donc g est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

b) $g(1) = f(1) - 1 = 1$ $f(x) = o(x)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

g est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ et $0 \in]-\infty; 1]$. Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ ($\Leftrightarrow f(x) = x$) admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$.

Graphiquement, c'est l'intersection entre C_f et la droite d'équation $y = x$: $\alpha \approx 2,1$

4) program question4;

var a, b, c : real;

begin a := 1; b := 3;

repeat c := (a+b)/2;

if $(1+(1+c)/(2*\text{sqrt}(c))-c)<0$ then b:=c else a:=c;

until $(b - a) \leq 1E-5$;

writeln('Une valeur approchée de alpha ... 10-5 près est : ',a);readln;

end.

3) a) Par récurrence : $u_0 = 2 \geq 1$

$_$ si $u_n \geq 1$ $f(u_n) \geq f(1)$ (car f est croissante sur $[1; +\infty[$ $u_{n+1} \geq 2 \geq 1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

b) $u_n \in [1; +\infty[$, $\alpha \in [1; +\infty[$ et sur $[1; +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$. Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}} |u_n - \alpha| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}} |u_n - \alpha|$

Puis par récurrence : $-1 \leq \alpha \leq 3$ donc $-1 \leq \alpha - 2 \leq 1$ donc $|u_0 - \alpha| \leq 1$ ($= \frac{1}{(6\sqrt{3})^0}$)

— supposons que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{(6\sqrt{3})^n}$, alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}} \times \frac{1}{(6\sqrt{3})^n}$

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{(6\sqrt{3})^{n+1}}$ — Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{(6\sqrt{3})^n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(6\sqrt{3})^n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 3

1) a) Sur $]0;1[$ et sur $]1; +\infty[$ f est continue car quotient de fonctions continues.

En 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x)} = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\ln(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x)} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

C_f admet donc une tangente horizontale en 0.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \ln(x) = 0^-$ donc $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \ln(x) = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = +\infty$.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissances comparées) donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$

$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\ln(x)}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ C_f admet une branche parabolique de direction (Ox).

2) a) f est de classe C^1 sur $]0;1[$ et sur $]1; +\infty[$ comme de fonctions de classe C^1 .

b) $\forall x \in]0;1[\cup]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1 \times \ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}$

$\ln(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1 \Leftrightarrow x > e$.

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	0	+
$f(x)$	0	$+\infty$	e	$+\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$.

f est continue sur $[0;1[$, de classe C^1 sur $]0;1[$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$, donc d'après le théorème de

prolongement de la dérivée, f est de classe C^1 sur $[0;1[$ et $f'(0) = 0$.

3) a) f est continue et strictement décroissante sur $]1;e]$, donc elle réalise une bijection de $]1;e]$ sur $[e; +\infty[$.

b) f est dérivable sur $]1;e]$ et f' s'annule en e (avec $f(e) = e$).

Donc f^{-1} est dérivable sur $]e; +\infty[$ et $\forall x > e$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{\ln(f^{-1}(x))^2}{1 - f^{-1}(x)}$

c) $f(2) = \frac{2}{\ln(2)}$ donc $f^{-1}\left(\frac{2}{\ln(2)}\right) = 2$ donc $(f^{-1})'\left(\frac{2}{\ln(2)}\right) = \frac{\ln(2)^2}{1 - \ln(2)}$.