ECE1 : Devoir surveillé n°6
Mercredi 08 Février 2012

Le barème est donné à titre indicatif. Téléphones et calculatrices interdits.

Exercice 1 (4,5 points)

1. Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x}$.

a) Etudier la limite de f en -1. Interpréter graphiquement ce résultat.
b) Etudier le comportement asymptotique de f en $+\infty$.
c) Etudier les variations de f.

2. Montrer que f réalise une bijection de $]-1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On appelle g son application réciproque (on ne cherchera pas son expression).

3. a) Préciser l'ensemble de définition de g. Etudier sa continuité et ses variations.
b) Préciser les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les branches infinies correspondantes.

Exercice 2 (4 points)

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^x + x - 1$ et $g(x) = xe^x - 1$.

1) Etudier les limites et variations de g.
2) a) Montrer que f admet un unique point fixe α sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que : $0 < \alpha < 1$
3) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
On admet que cette suite est croissante.
a) Cette suite est-elle convergente ? Quelle est sa limite ?
b) Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le premier entier n tel que : $u_n > 10^6$.

Exercice 3 - d'après EDHEC 2008 (6 points)

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + e^x} + nx$

On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

l. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^x}{(1 + e^x)^2} \leq \dfrac{1}{4}$

b) Déterminer $f_n'(x)$ pour tout réel x.

c) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) Etudier la branche infinie de C_f en $+ \infty$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$.

3. a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.

b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

4. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x < 0$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(u_n) < 0$. Quel est le sens de variation de (u_n) ?

5) En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \sim_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{2n}$

Exercice 4 - EDHEC 2004 (5,5 points)

Dans cet exercice, la lettre n désigne un entier naturel non nul.

On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x\, e^{-n/x}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.

On admet que $\forall x \neq 0$, $f_n'(x) = \dfrac{x + n}{x} e^{-n/x}$.

1. a) Montrer que f_n est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0; +\infty[$

b) Montrer que f_n est continue à droite en 0.

2. a) Montrer que $\forall x \neq 0$, $f_n(x) = -n \times \dfrac{e^{-n/x}}{-n/x}$. Déterminer la limite de f en 0^-.

b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$

c) Etudier le comportement asymptotique de f_n en $+\infty$.

d) Donner le tableau de variations de f_n.

3. a) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.

b) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est solution de l'équation $x \ln(x) = n$.