ECE1 : Correction du D.S. n°6

Exercice 1

1. a) $\lim\limits_{x \to -1} x^3 = -1 < 0$ $\lim\limits_{x \to -1,\, x > -1} 1 + x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to -1,\, x > -1} f(x) = -\infty$

Donc C_f admet une asymptote verticale d'équation x = -1.

b) $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{x^3}{x} \sim_{+\infty} x^2$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\dfrac{f(x)}{x} \sim_{+\infty} x$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

Donc C_f admet une branche parabolique de direction (Oy).

c) $\forall x > 1$, $f'(x) = \dfrac{3x^2(1+x) - x^3 \times 1}{(1+x)^2} = \dfrac{2x^3 + 3x^2}{(1+x)^3} = \dfrac{x^2(2x+3)}{(1+x)^2}$ $\quad 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3/2$

x	-1		0		$+\infty$
f '(x)		+	0	+	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

2) f est continue et strictement croissante sur $]-1; +\infty[$, donc f réalise une bijection de $]-1; +\infty[$ sur $f(]-1; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$.

3) a) Donc l'application réciproque g est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

C_f et C_g sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x, donc C_g admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation y = -1 et en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).

Exercice 2

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x - 1 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ (croissances comparées), donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$ du signe de 1 + x

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g'(x)		–	0	+	
g(x)	-1	$\searrow$	$-\dfrac{1}{e} - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) On peut remarquer que $g(x) = f(x) - x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sur $]-\infty;-1]$ g a pour maximum -1 donc l'équation g(x) = 0 ($\Leftrightarrow$ f(x) = x) n'admet pas de solutions.

Sur $[-1; +\infty[$, g est continue et strictement croissante, et $0 \in]-1 - 1/e; +\infty[$, donc l'équation g(x) = 0 ($\Leftrightarrow$ f(x) = x) admet une unique solution α sur $[-1; +\infty[$.

Donc f admet un unique point fixe α sur $\mathbb{R}$.

b) $g(0) = -1$ $g(\alpha) = 0$ $g(1) = e - 1 > 0$

$-1 < 0 < e - 1$ donc $g(0) < g(\alpha) < g(1)$ donc $0 < \alpha < 1$.

3) a) Si (u_n) converge, elle converge vers un point fixe de f, donc vers α.

Or $u_0 = 1$ et (u_n) croissante, donc (u_n) ne peut pas converger vers α.

(u_n) est croissante et ne converge pas, donc elle tend vers $+\infty$.

b)
```
program ds6;
var n : integer;     u : real;
begin      n:=0;  u:=1;
   repeat
     n:=n+1;
     u:=u*exp(u)+u-1;
   until u>1E6;
writeln('n vaut ',n); readln; end.
```

Exercice 3

1. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{4} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{(1+e^x)^2 - 4e^x}{4(1+e^x)^2} = \frac{1 + 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{4(1+e^x)^2}$

$= \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{4(e^x+1)^2} = \frac{(e^x - 1)^2}{4(e^x+1)^2} \geq 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^x}{(1+e^x)^2} \leq \frac{1}{4}$

Ou : Posons $g(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ alors $g'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x \times 2 \times (1+e^x)}{(1+e^x)^4}$

$= \frac{e^x(1+e^x)(1+e^x - 2e^x)}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$ $\quad 1 - e^x \geq 0 \Leftrightarrow -e^x \geq -1 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$ Donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$

Le maximum de g sur $\mathbb{R}$ est $\frac{1}{4}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq 1/4$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + n$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^x}{(1+e^x)^2} \leq \frac{1}{4}$, donc $-\frac{e^x}{(1+e^x)^2} \geq -\frac{1}{4}$ $\; f_n(x) \geq n - \frac{1}{4} > 0$ car $n \geq 1$.

Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

De plus comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$, C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = nx$ en $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$

3) a) La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $0 \in]-\infty; +\infty[$, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$.

b) $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+e^{-1/n}} - 1 = -\frac{e^{-1/n}}{1+e^{-1/n}} < 0 \quad f_n(0) = \frac{1}{2} > 0$

Donc $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) \leq f_n(u_n) \leq f_n(0)$. Comme f_n est croissante sur $\mathbb{R}$, $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq 0$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

4) a) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + (n+1)x - \left(\frac{1}{1+e^x} + nx\right) = x \leq 0$ sur $]-\infty;0]$.

Donc $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ sur $]-\infty;0]$

b) $u_n \leq 0$ donc $f_{n+1}(u_n) \leq f_n(u_n) \quad f_{n+1}(u_n) \leq 0$.

Or $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ donc $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$. Comme f_n est croissante sur $\mathbb{R}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

Donc (u_n) est croissante.

d) $f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{un}} + nu_n = 0 \Leftrightarrow nu_n = -\frac{1}{1+e^{un}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{1+e^{un}} = -\frac{1}{2}$. Donc $nu_n \sim_{+\infty} -\frac{1}{2}$ donc $u_n \sim_{+\infty} -\frac{1}{2n}$

Exercice 4

1. a) $x \longmapsto e^{-x/n}$ est continue comme composée de fonctions continues, donc f_n est continue sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ car produit de fonctions continues.

b) $\lim\limits_{x \to 0,\, x > 0} -\frac{n}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0,\, x > 0} e^{-n/x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0,\, x > 0} f_n(x) = 0 = f_n(0)$.

Donc f est continue à droite en 0.

2. a) $f_n(x) = x \times e^{-n/x} = \frac{e^{-n/x}}{1/x} = -n \times \frac{e^{-n/x}}{-n/x}$ $\lim\limits_{x \to 0,\, x < 0} -\frac{n}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ (croiss. comp.)

donc $\lim\limits_{x \to 0,\, x < 0} f_n(x) = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{n}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-n/x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-n/x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-n/x} = 1$. $f(x) - x = x(e^{-n/x} - 1)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{n}{x} = 0$ donc $e^{-n/x} - 1 \sim -\frac{n}{x}$ donc $f(x) - x \sim -n$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = -n$

Donc la courbe de C_{fn} admet une asymptote oblique d'équation $y = x - n$ en $+\infty$.

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
$x + n$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+n}{x}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f'_n(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	↗	$-ne$	↘	$-\infty$ ‖ 0	↗	$+\infty$

$f_n(-n) = -ne^{-n/-n} = -ne$

3. a) Sur $]-\infty;0[$, le maximum de f est négatif, donc l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solutions.
Sur $[0;+\infty[$ f est continue, strictement croissante et $1 \in]0;+\infty[$. Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n.

b) $f_n(u_n) = 1 \Leftrightarrow u_n e^{-n/un} = 1 \Leftrightarrow \ln(u_n e^{-n/u_n}) = \ln(1) \Leftrightarrow \ln(u_n) + \ln(e^{-n/un}) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(u_n) - \frac{n}{u_n} = 0 \Leftrightarrow u_n\ln(u_n) - n = 0 \Leftrightarrow u_n\ln(u_n) = n$. Donc (u_n) est une solution de l'équation $x\ln(x) = n$.