ECE1 : Devoir surveillé n°5
Lundi 23 Janvier 2012

Le barème est donné à titre indicatif. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$

1) f est-elle continue en 0 ?
2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
3) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
On admet que $\forall\, n \geq 1, u_n > 0$.
Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 10^8$.
4) Soit g la fonction définie sur $]0; 1[\cup]1;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.
a) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
b) Déterminer les limites de g en 1 et en $+\infty$.

Exercice 2 (2 points)

Soit $N \geq 1$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, N\}$.
1) Rappeler $P(X = k)$ (pour $k \in \{1, \dots, N\}$), $E(X)$ et $V(X)$.
2) On pose $Y = \dfrac{1}{2^X}$. Déterminer $E(Y)$.

Exercice 3 (7,5 points)

On étudie le cours en bourse d'une action.
On suppose les variations journalières indépendantes les unes des autres.
On convient de noter 0 le cours correspondant au jour $j = 0$, début de l'observation, et on suppose que chaque jour, le cours monte d'une unité (+1) avec une probabilité p ($0 < p < 1$) ou descend d'une unité (-1) avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note X_{2n} le cours constaté le $(2n)^{\text{ème}}$ jour suivant le début de l'observation.
Par exemple, si $n = 2$ et que le cours a baissé les 3 premiers jours et monté le quatrième jour, on a $X_4 = -1 - 1 - 1 + 1 = -2$.
1) Quelles sont les valeurs prises par X_4 ?
Plus généralement, quelles sont les valeurs prises par X_{2n} ?
2) On note Y_{2n} (respectivement Z_{2n}) le nombre de jours (pendant les 2n jours d'observation) où l'action a monté (respectivement baissé).
a) Quelles sont les lois de probabilité de Y_{2n} ? de Z_{2n} ?
b) Donner leurs espérances et leurs variances.
3) a) Quelle relation lie n, Y_{2n} et Z_{2n} ? Quelle relation lie X_{2n}, Y_{2n} et Z_{2n} ?
En déduire que $X_{2n} = 2Y_{2n} - 2n$.
b) Quelle est l'espérance de X_{2n} ? Quelle est sa variance ?
4) On observe l'évolution sur 10 jours : le cours a monté 7 fois et a baissé 3 fois.
Soit H le nombre de jours où le cours a monté pendant les 7 premiers jours.
a) Reconnaître la loi de H. Préciser les valeurs prises par H, et $P(H = 4)$.
b) Déterminer l'espérance de H.

Exercice 4 (5,5 points)

Soit $N \geq 3$. On lance N fois consécutives une pièce équilibrée.
Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on dit que le k-ième lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k - 1)$-ième lancer.
Pour $n \in \{2, \ldots, N\}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.
1. a) Donner la loi de X_2.
b) Calculer l'espérance et la variance de X_2.
2. a) Donner la loi de X_3.
b) Vérifier que $E(X_3) = 1$ et que $V(X_3) = \frac{1}{2}$.
3. a) Pour $n \in \{2, \ldots, N\}$, déterminer $X_n(\Omega)$.
b) Pour $n \in \{2, \ldots, N\}$, déterminer $P(X_n = 0)$.
c) Montrer que $\forall\, n \in \{2, \ldots., N - 1\}$, $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(X_n = k) + \frac{1}{2} P(X_n = k - 1)$$