ECE1 : Correction du D.S. n°5

Exercice 1

1) $\lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$ donc $e^{2x} - 1 \sim_0 2x$ $\quad v \sim_0 \dfrac{2x}{x} \sim_0 2$.

Donc $\lim\limits_{x \to 0,\, x \neq 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0,\, x \neq 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x} = 2$. $f(0) = 2$ donc f est continue en 0.

2) $e^{2x} - 1 \sim_{+\infty} e^{2x}$ donc $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} = +\infty$ par croissances comparées

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - 1 = -1$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

3)
```
program ds5;
var n: integer;
    u : real;
begin
  n :=1;
  u := 2;
  repeat
    n := n + 1;
    u := (exp(2*u) - 1)/u;
  until u>1E6;
  writeln('n vaut ',n);
  readln;
end.
```

4) a) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

Donc g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

b) $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 1,\, x < 1} \ln(x) = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 1,\, x < 1} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1,\, x > 1} \ln(x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 1,\, x > 1} g(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0^+$ (croissances comparées) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\ln(x)} = +\infty$.

Exercice 2

1) $P(X = k) = \dfrac{1}{N}$. $E(X) = \dfrac{N + 1}{2}$. $V(X) = \dfrac{N^2 - 1}{12}$

2) D'après le théorème de transfert, $E(Y) = E\left(\dfrac{1}{2^X}\right) = \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{1}{2^k} P(X = k) = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{1}{2^k}$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{1 - \frac{1}{2^{N+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - 1\right) = \frac{1}{N}\left(2\left(1 - \frac{1}{2^{N+1}}\right) - 1\right) = \frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{2^N}\right)$$

Exercice 3

1) 4 hausses : $X_4 = 4$ 3 hausses, 1 baisse : $X_4 = 2$ 2 hausses, 2 baisses : $X_4 = 0$
1 hausse, 3 baisses : $X_4 = -2$ 4 baisses : $X_4 = -4$. Donc $X_4(\Omega) = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$
Plus généralement, X_{2n} prend toutes les valeurs paires entre -2n (que des baisses) à 2n (que des hausses) $X_{2n} = \{-2n, -2n - 2, \ldots, 2n - 2, 2n\}$
2) a) Chaque jour, la probabilité de hausse est p. Les variations sur les 2n jours sont indépendantes. Y_{2n} compte le nombre de hausses. Donc $Y_{2n} \longrightarrow B(2n, p)$.
De même $Z_n \longrightarrow B(2n, q)$.
b) $E(Y_{2n}) = 2np$ $V(Y_{2n}) = 2npq$ $E(Z_{2n}) = 2nq$ $V(Z_{2n}) = 2npq$
3) a) Chaque jour, le cours monte ou descend. Donc $Y_{2n} + Z_{2n} = 2n$
X_{2n} = nombre de hausses – nombre de baisses = $Y_{2n} - Z_{2n}$
$X_{2n} = Y_{2n} - (2n - Y_{2n}) = 2Y_{2n} - 2n$
b) Donc $E(X_{2n}) = 2E(Y_{2n}) - 2n = 4np - 2n = 2n(2p - 1)$ $V(X_{2n}) = 2^2V(Y_{2n}) = 8npq$
4)a) Il y a 10 jours en tout, dont une proportion de $\frac{7}{10}$ où l'action a monté.
H est le nombre de jours où l'action a monté parmi 7 jours distincts.
Donc $H \longrightarrow H(10, 7, 7/10)$.
$H(\Omega) = \{4, 5, 6, 7\}$.
$P(H = 4) = \dfrac{\binom{7}{4} \times \binom{3}{3}}{\binom{10}{7}} = \dfrac{35 \times 1}{120} = \dfrac{7}{24}$.
b) $E(H) = 7 \times \dfrac{7}{10} = \dfrac{49}{10}$.

Exercice 4

1) a) $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ $P(X_2 = 0) = P(PP \cup FF) = 2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.
$P(X_2 = 1) = P(PF \cup FP) = 2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.
b) On remarque que : $X_2 \longrightarrow B(1/2)$. Donc $E(X_2) = \dfrac{1}{2}$ $V(X_2) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.
2) a) $X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$ $P(X_3 = 0) = P(PPP \cup FFF) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$.
$P(X_3 = 1) = P(PFF \cup PPF \cup FPP \cup FFP) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$
$P(X_3 = 2) = P(PFP \cup FPF) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$.
b) $E(X_3) = 0 \times \dfrac{1}{4} + 1 \times \dfrac{1}{2} + 2 \times \dfrac{1}{4} = 1$ (ou par symétrie)
$E(X_3^2) = 0^2 \times \dfrac{1}{4} + 1^2 \times \dfrac{1}{2} + 2^2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{2}$ $V(X_3) = E(X_3^2) - E(X_3)^2 = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$.
3) a) Pour n lancers, il y a entre 0 et n – 1 changements. Donc $X_n(\Omega) = \{0, \ldots, n - 1\}$
b) $(X_n = 0) = PP\ldots P \cup FF\ldots F$ donc $P(X_n = 0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times 2 = \dfrac{1}{2^{n-1}}$
b) $(X_{n+1} = k)$ = "il y a k changements pour les n+1 premiers lancers"
="il y a k changements pour les n premiers lancers, et pas de changement au dernier
OU il y a k - 1 changements pour les n premiers lancers et un changement au dernier"
$P(X_{n+1} = k) = P(X_n = k) \times \dfrac{1}{2}$ (même côté que le n ème lancer) + $P(X_n = k - 1) \times \dfrac{1}{2}$ (côté opposé que le n-ème).