ECE1 : Devoir Surveillé n°3
Mercredi 30 Novembre 2011

Calculatrice et portable interdits. Le barème est donné à titre indicatif.

Questions de cours (1,5 points) :
1) Donner la formule du triangle de Pascal, puis écrire le triangle de Pascal jusqu'à $n = 6$.
2) Soient a et b deux réels. Donner le développement de $(a + b)^6$

Exercice 1 (2 points)
Les deux questions sont indépendantes.
1) Ecrire un programme Pascal qui demande deux nombres entiers x et y à l'utilisateur, puis affiche le plus grand des deux.
2) Ecrire un programme Pascal qui, demande un entier n à l'utilisateur, puis affiche la valeur de $S = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \sqrt{k})$

Exercice 2(2 points)
Déterminer un équivalent simple, puis la limite de :
a) $u_n = \dfrac{1 - n^3}{2n^2 + 3n + 1}$ b) $v_n = \dfrac{4^n - 3^n}{(n + \ln(n))^2}$ c) $w_n = \sqrt{n} \times \ln\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Exercice 3 (7 points)
Une urne contient 7 boules noires et 3 boules rouges.

1) On tire simultanément 4 boules dans l'urne.
On note A = "Toutes les boules tirées sont noires"
B = "Une boule exactement est rouge"
C = "Au moins une boule tirée est rouge"
D = "Exactement deux boules sont rouges"
a) Déterminer card(Ω).
b) Calculer P(A), P(B), P(C), P(D). *(les réponses seront sous forme de fractions irréductibles)*

2) On considère maintenant que les 4 tirages sont successifs, et avec remise.
(dans cette question, on pourra ne pas simplifier les probabilités)
a) Déterminer card(Ω).
b) Déterminer P(A), P(B), et P(D) dans ce cas.
c) Déterminer P(E), où E = "On tire quatre boules différentes".
d) Déterminer $P(A \cup E)$.

3) On considère maintenant qu'on tire l'une après l'autre et sans les remettre toutes les boules de l'urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir toutes les boules noires d'abord, puis toutes les boules rouges ?

Exercice 4 (2,5 points)
On considère un jeu de 32 cartes.
On tire 3 cartes de ce jeu, successivement, et sans les remettre.
1) Quelle est la probabilité d'obtenir le premier cœur en deuxième ? en troisième ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir le deuxième cœur en deuxième ? en troisième ?

Exercice 5 (3,5 points)
Une boîte contient 3 jetons (numérotés de 1 à 3).
Soit $n \geq 1$. On tire n fois de suite un jeton, en le remettant à chaque fois.
On note p_n la probabilité que les trois chiffres (1, 2, 3) apparaissent au moins une fois lors des n lancers.
Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose : A_i = {le numéro i n'apparaît pas durant les n tirages}
1) a) Calculer, en fonction de n, $P(A_1)$, puis $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.
b) En déduire que $p_n = \dfrac{3^n - 3\times 2^n + 3}{3^n}$
c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 6 (1,5 points)
Soient n et p deux entiers tels que : $0 \leq p \leq n$.
1) Montrer que $\forall k \in \{0, \ldots, p\}$, $\binom{n}{k} \times \binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p} \times \binom{p}{k}$.
2) En déduire l'expression, en fonction de n et p, de $S = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{p-k}$.