ECE1 : Correction du D.S. n°3

Questions de cours :

1) $\forall$ n $\geq$ 1, $\forall$ p tel que 1 $\leq$ p $\leq$ n, , $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$

n\p	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

2) Donc, d'après la formule du binôme de Newton :

$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

Exercice 1

1)
```
program question1;
var x,y : integer;
begin
   writeln('Donner deux entiers');
   readln(x,y);
   if x>y then writeln('Le plus grand est ',x)
          else writeln('le plus grand est ',y);
   readln;
end.
```
2)
```
program question2;
var k,n : integer;
    s:real;
begin
    writeln('Valeur de n ?');
    readln(n);
    s:=0;
    for k:=1 to n do s:=s+ln(1 + sqrt(k));
    writeln('La somme vaut : ',s);
    readln;
end.
```

Exercice 2

a) $\dfrac{1 - n^3}{2n^2 + 3n + 1} \sim_{+\infty} -\dfrac{n^3}{2n^2} \sim_{+\infty} -\dfrac{n}{2}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{n}{2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

b) $3^n =_{+\infty} o(4^n)$ donc $4^n - 3^n \sim_{+\infty} 4^n$ $\ln(n) =_{+\infty} o(n)$ donc $n + \ln(n) \sim_{+\infty} n$

et $(n + \ln(n))^2 \sim_{+\infty} n^2$ Donc $v_n \sim_{+\infty} \dfrac{4^n}{n^2}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4^n}{n^2} = +\infty$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim_{+\infty} -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $w_n \sim -\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \sim_{+\infty} -1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -1$.

Exercice 3

1) Il y a équiprobabilité. card(Ω) = $\binom{10}{4} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 10 \times 3 \times 7 = 210$

card(A) = $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 7 \times 5 = 35$ P(A) = $\frac{7 \times 5}{10 \times 3 \times 7} = \frac{1}{6}$

card(B) = $\binom{3}{1}\binom{7}{3} = 3 \times 35$ P(B) = $\frac{105}{210} = \frac{1}{2}$

P(C) = $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{5}{6}$ card(D) = $\binom{3}{2}\binom{7}{2} = 3 \times 21 = 63$ P(D) = $\frac{63}{210} = \frac{3}{10}$

2) a) card(Ω) = $10^4 = 10000$

b) P(A) = $\frac{7^4}{10^4} = \frac{2401}{10000}$

card(B) = 4 (place de la rouge) $\times$ 3 (choix de la rouge) $\times\ 7^3$ (choix des noires) = 4116

P(B) = $\frac{1029}{2500}$

P(C) = $1 - P(A) = \frac{7599}{10000}$ card(D) = $\binom{4}{2}$ (places des rouges) $\times\ 3^2 \times 7^2 = 2646$ P(D) = $\frac{1323}{5000}$

c) P(E) = $\frac{A_{10}^4}{10^4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{10^4} = \frac{9 \times 7}{5 \times 5 \times 5} = \frac{63}{125}$.

d) $(A \cap E)$ = "on tire 4 noires distinctes" card$(A \cap E) = A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4$

$P(A \cap E) = \frac{A_7^4}{10^4}$

$P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = \frac{7^4 + A_{10}^4 - A_7^4}{10^4}$

3) On choisit un ordre sur les 10 boules : card(Ω) = 10!

A : on choisit un ordre sur les 7 noires : 7!

puis on choisit un ordre sur les 3 rouges : 3!

P(A) = $\frac{7! \times 3!}{10!} = \frac{3 \times 2}{8 \times 9 \times 10} = \frac{1}{120}$

Ou : en considérant les boules de la même couleur non distinctes :

Choisir un tirage, c'est choisir la place des rouges : $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$

Une seule possibilité pour avoir les noires d'abord : P(A) = $\frac{1}{120}$.

Exercice 4

Il y a trois tirages successifs sans remise : card(Ω) = $A_{32}^3 = 32 \times 31 \times 30$

1) On note A = "1er cœur en deuxième" B = "1er cœur en troisième"

card(A) = $24 \times 8 \times 30$ (1 autre, 1 cœur, 1 troisième carte)

P(A) = $\frac{24 \times 8 \times 30}{32 \times 31 \times 30} = \frac{6}{31}$

card(B) = $24 \times 23 \times 8$ (2 autres puis 1 cœur)

P(B) = $\frac{24 \times 23 \times 8}{32 \times 31 \times 30} = \frac{23}{31 \times 5} = \frac{23}{155}$

2) On note C= "2ème cœur en deuxième" D = "2ème cœur en troisième".

card(C) = $8 \times 7 \times 30$ (1 cœur, 1 cœur, 1 troisième carte)

$P(C) = \dfrac{8 \times 7 \times 30}{32 \times 31 \times 30} = \dfrac{7}{124}$

card(D) = $8 \times 24 \times 7$ (1 cœur, 1 autre, 1 cœur) + $24 \times 8 \times 7$ (1 autre, 1 cœur, 1 cœur)

$P(D) = \dfrac{2 \times 8 \times 24 \times 7}{32 \times 31 \times 30} = \dfrac{14}{155}$

Exercice 5

1) a) Pour chacun des n tirages, il y a 3 jetons possibles. Donc card(Ω) = 3^n.

card(A_1) = 2^n (jetons 2 ou 3 à chaque tirage) donc $P(A_1) = \dfrac{2^n}{3^n}$

On applique la formule du crible :

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

Or $P(A_2) = P(A_3) = P(A_1) = \dfrac{2^n}{3^n}$

$P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{3^n}$ (on tire toujours le jeton 3). De même, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \dfrac{1}{3^n}$.

Enfin $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$, donc $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$.

Donc $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3\times\dfrac{2^n}{3^n} - 3\times\dfrac{1}{3^n}$

b) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ = "Au moins un chiffre n'apparaît pas"

Donc $p_n = P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - 3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{3^n - 3\times2^n + 3}{3^n}$

c) $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ et $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$.

(OU : $3^n - 3\times2^n + 3 \sim_{+\infty} 3^n$ donc $p_n \sim_{+\infty} \dfrac{3^n}{3^n} \sim_{+\infty} 1$).

Pour un très grand nombre de tirages, on est presque sûr d'obtenir au moins une fois chaque jeton.

Exercice 6

1) $\binom{n}{k} \times \binom{n-k}{p-k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \times \dfrac{(n-k)!}{(p-k)!((n-k)-(p-k))!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \times \dfrac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!}$

$= \dfrac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!}$

Or $\binom{n}{p} \times \binom{p}{k} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} \times \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \dfrac{n!}{(n-p)!k!(p-k)!}$ Donc $\binom{n}{k} \times \binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p} \times \binom{p}{k}$.

2) Donc $S = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{n}{p} \times \binom{p}{k} = \binom{n}{p} \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 1^{p-k} 1^k = \binom{n}{p} 2^p$ d'après la formule du binôme de Newton.