Devoir Surveillé n°2
Jeudi 03 Novembre 2011

Le barème est donné à titre indicatif. On donne : $\frac{\ln(999)}{\ln(2)} \approx 9{,}96$

Question de cours *(1 point)* : Enoncer le théorème "des gendarmes"

Exercice 1 *(6,5 points)*

1) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $u_1 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 2 \quad \forall\, n \geq 1$.

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

2) Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\begin{cases} v_1 = -5 \\ v_2 = -15 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+2} = 3v_{n+1} + 4v_n \end{cases}$.

a) Déterminer l'expression de (v_n) en fonction de n.
b) En déduire la limite de (v_n).

3) Soit (w_n) la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{w_n}{(n+1)} + \dfrac{3}{(n+1)!} \end{cases}$

a) Déterminer la nature de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par : $z_n = n! \times w_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
b) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

Exercice 2 *(2,5 points)*

Déterminer la limite de : a) $u_n = n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$ b) $v_n = \dfrac{n^2 - 3^n}{2^n - \ln(n) + 3}$

Exercice 3 *(10 points)*

Partie I Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 2$

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer les points fixes de f.

Dans la suite, on considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation :

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$

Les parties II et III sont indépendantes.

Partie II Dans cette partie, on choisit $u_0 = \frac{3}{2}$.

1) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 2$.
2) Etudier le sens de variation de (u_n).
3) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie III Dans cette partie, on choisit $u_0 = 3$.

1) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 3$.
2) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 1 \geq 2(u_n - 1)$
3) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 2^{n+1} + 1$
4) En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5) Déterminer un rang n_0 à partir duquel on est sûr que $u_n \geq 10^3$.