Correction du D.S. n°2

Question de cours : voir cours

Exercice 1

1) (u_n) est une suite arithmético-géométrique :

Point fixe : $c = \frac{1}{2}c + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}c = 2 \Leftrightarrow c = 4$.

Donc $v_n = u_n - 4$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Donc $\forall\ n \geq 1$, $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} v_0$ $\quad u_n - 4 = \frac{1}{2^{n-1}}(-1 - 4)\ \ u_n = 4 - \frac{5}{2^{n-1}}$.

2) a) (v_n) est une suite linéaire récurrente d'ordre 2 à coefficients constants.

Equation caractéristique : $x^2 = 3x + 4 \quad x^2 - 3x - 4 = 0$

-1 est racine évidente : $(x + 1)(x - 4) = 0$ donc $x = -1$ ou 4

Donc v_n s'écrit sous la forme : $v_n = \lambda\, 4^n + \mu\, (-1)^n$

$$\begin{cases} v_1 = \lambda 4^1 + \mu(-1)^1 = -5 \\ v_2 = \lambda 4^2 + \mu(-1)^2 = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda - \mu = -5 \\ 16\lambda + \mu = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20\lambda = -20 \\ 16\lambda + \mu = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -4^n + (-1)^n$

b) $v_n = 4^n\left(-1 + \frac{(-1)^n}{4^n}\right) = 4^n\left(-1 + \left(\frac{-1}{4}\right)^n\right)$ $\quad -1 < -\frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{4} = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

3) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = (n+1)! \times w_{n+1} = (n + 1)! \times \left(\frac{w_n}{n + 1} + \frac{3}{(n + 1)!}\right)$

$= \frac{w_n \times (n + 1)!}{n + 1} + 3 = w_n \times n! + 3 = z_n + 3$.

Donc (z_n) est arithmétique de raison 3. Donc $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $z_n = z_0 + nr = 2 + 3n$ ($z_0 = 0! \times w_0 = 2$)

$n! \times w_n = 3n + 2 \quad w_n = \frac{3n + 2}{n!}$

Exercice 2

a) $$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 = \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{1 + \frac{1}{n} - 1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{1}{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)}$$

Donc $u_n = \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)}$ $\quad$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

b) $$\frac{n^2 - 3^n}{2^n - \ln(n) + 3} = \frac{3^n\left(\frac{n^2}{3^n} - 1\right)}{2^n\left(1 - \frac{\ln(n)}{2^n} + \frac{3}{2^n}\right)} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{\frac{n^2}{3^n} - 1}{1 - \frac{\ln(n)}{2^n} + \frac{3}{2^n}}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{3^n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{2^n} = 0$ (croissances comparées) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\frac{n^2}{3^n} - 1}{1 - \frac{\ln(n)}{2^n} + \frac{3}{2^n}} = -1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ (car $\frac{3}{2} > 1$) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

Exercice 4

Partie I : 1) $f'(x) = 2x - 2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

2) $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$ (car 1 racine évidente) $x = 1$ ou 2

Partie II : 1) Par récurrence :

_ $u_0 = \dfrac{3}{2}$ donc $1 \leq u_0 \leq 2$.

_ supposons que $1 \leq u_n \leq 2$
f est croissante sur [1;] donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$
$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$
Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 2$.

2) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^3 - 3u_n + 2 = (u_n - 1)(u_n - 2)$
Or $u_n \geq 1$ donc $u_n - 1 \geq 0$ et $u_n \leq 2$ donc $u_n - 2 \leq 0$. Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. (u_n) est décroissante.

3) (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers un réel L.

Donc $\begin{cases} u_{n+1} \text{ converge vers } L \\ u_n^2 - 2u_n + 2 \text{ converge vers } L^2 - 2L + 2 \end{cases}$ donc $L^2 - 2L + 2 = L$.

D'après la partie I, L est un point fixe de f, donc L = 1 ou 2.

Or $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et (u_n) est décroissante, donc L = 2 est impossible.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Partie III

1. Par récurrence : _ $u_0 = 3 \geq 3$
_ supposons que $u_n \geq 3$
f est croissante sur $[3; +\infty[$, donc $f(u_n) \geq f(3)$ $u_{n+1} \geq 5 \geq 3$
Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 3$.

2. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 1 = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2$
Comme $u_n \geq 3$ $u_n - 1 \geq 2$
En multipliant par $u_n - 1 \geq 0$: $(u_n - 1)^2 \geq 2(u_n - 1)$ $u_{n+1} - 1 \geq 2(u_n - 1)$

3. Par récurrence :
_ pour $n = 0$: $u_0 = 3$ $2^{0+1} + 1 = 2 + 1 = 3$ $3 \geq 3$ donc vrai au rang 0.
_ supposons que $u_n \geq 2^{n+1} + 1$
$u_n - 1 \geq 2^{n+1}$ $2(u_n - 1) \geq 2^{n+1} \times 2$
donc $u_{n+1} - 1 \geq 2(u_n - 1) \geq 2^{n+2}$ $u_{n+1} \geq 2^{n+2} + 1$
Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 2^{n+1} + 1$

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{n+1} + 1 = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

5. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 2^{n+1} + 1$. Donc, pour que $u_n \geq 10^3$, il suffit que :

$$2^{n+1} + 1 \geq 10^3 \Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 999 \Leftrightarrow \ln(2^{n+1}) \geq \ln(999) \Leftrightarrow (n+1)\ln(2) \geq \ln(999) \Leftrightarrow n + 1 \geq \frac{\ln(999)}{\ln(2)}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(999)}{\ln(2)} - 1 \ (\approx 8{,}96)$$

Donc $n_0 = 9$ convient.