ECE1 : Devoir Surveillé n°1

Le barème est donné à titre indicatif
Calculatrices interdites

Exercice 1 (9 points)

On considère les polynômes $P(x) = 3x^2 + 5x - 2$ et $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 10$

1) a) Déterminer la forme canonique de P. En déduire les racines de P.

b) Déterminer la forme factorisée de P.

c) Soit $m \in \mathbb{R}$.

Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de l'équation $P(x) = mx - 5$

d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 2x^2 + 9x - 6$

2) Déterminer la forme la plus factorisée de Q.

3) Résoudre l'inéquation $\dfrac{x^3 - 11x^2 + x - 6}{3x^2 + 5x - 2} \geq -2$

Exercice 2 (6 points)

Les 3 questions sont indépendante

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme : $A_n = \sum_{k=0}^{n+1} (2k^3 + 3k^2 - (n+1))$

2) Soit $n \geq 1$.

a) Calculer la somme : $B_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{3}{4^{k-1}}$

b) Résoudre l'inéquation $4 - \dfrac{1}{4^{n-1}} > 3{,}9999$

3) Soit $n \geq 4$. Déterminer la valeur de $C_n = \sum_{k=4}^{n} (-2)^{k-2}$

Exercice 3 (5 points)

Pour $n \geq 1$, on considère les sommes $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

1) a) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$

b) En déduire la valeur de S_n.

2) a) Montrer que pour tout $t \in [0; +\infty[$, $t \geq \ln(1+t)$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $T_n \geq \ln(n+1)$