ECE1 : Correction du Devoir surveillé n°1

Exercice 1 1) a) $P(x) = 3x^2 + 5x - 2 = 3\left(x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}\right)$

Or $\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}$ donc $x^2 + \frac{5}{3}x = \left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}$

Donc $P(x) = 3\left(\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} - \frac{24}{36}\right) = 3\left(\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{49}{36}\right)$

Donc $P(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{49}{36} \Leftrightarrow x + \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$ ou $x + \frac{5}{6} = -\frac{7}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ou $x = -2$.

b) Les racines de P sont -2 et $\frac{1}{3}$ donc $P(x) = 3(x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

c) $P(x) = mx - 5 \Leftrightarrow 3x^2 + (5 - m)x + 3 = 0$

$\Delta = (5 - m)^2 - 4\times3\times3 = 25 - 10m + m^2 - 36 = m^2 - 10m - 11$

-1 est racine évidente donc $\Delta = (m + 1)(m - 11)$

m	$-\infty$		-1		11		$+\infty$
$\Delta = m^2 - 2m - 11$		+	0	–	0	+	

Donc si $m < -1$ ou $m > 11$, il y a deux solutions

si $m = -1$ ou 11, il y a une solution.

si $-1 < m < 11$, il n'y a pas de solutions.

d) $P(x) - (2x^2 + 9x - 6) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ (2 racine évidente)

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $P(x) - (2x^2 + 9x - 6) \geq 0$.

2) $Q(2) = 0$ donc on peut factoriser Q par $x - 2$. Donc $Q(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$

Or $(x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$

Par identification des coefficients : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -5 \\ c - 2b = 11 \\ -2c = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 5 \end{cases}$

Donc $Q(x) = (x - 2)(x^2 - 3x + 5)$

$\Delta = -11 < 0$ donc $x^2 - 3x + 5$ ne peut pas être factorisé.

3) $\frac{x^3 - 11x^2 + x - 6}{3x^2 + 5x - 2} \geq -2 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 11x^2 + x - 6 + 2(3x^2 + 5x - 2)}{3x^2 + 5x - 2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^3 - 5x^2 + 11x - 10}{3x^2 + 5x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x^2 - 3x + 5)}{3(x + 2)(x - 1/3)} \geq 0$

x	$-\infty$		-2		1/3		2		$+\infty$
$x - 2$		–		–		–	0	+	
$x^2 - 3x + 5$		+		+		+		+	
p(x)		+	0	–	0	+		+	
q(x)/p(x)		–	‖	+	‖	–	0	+	

Donc $S =]-2 ;\frac{1}{3}[\cup[2;+\infty[$

Exercice 2

1) $A_n = 2\sum_{k=0}^{n+1} k^3 + 3\sum_{k=0}^{n+1} k^2 - \sum_{k=0}^{n+1} (n + 1)$

$= 2\times\frac{(n + 1)^2(n + 2)^2}{4} + 3\times\frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6} - (n + 1)(n + 2)$

$= (n+1)(n+2)\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{2n+3}{2} - 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n^2+3n+2+2n+3-2)}{2}$

$= \frac{(n+1)(n+2)(n^2+5n+3)}{2}$

2) a) 1ère méthode : avec j = k – 1 : $B_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{3}{4^j} = 3 \times \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^j = 3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}$

$= 3 \times \frac{4}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) = 4\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) = 4 - \frac{1}{4^{n-1}}$

2ème méthode : $B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{4^{k-1}} - \frac{3}{4^{-1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{3\times 4}{4^k} - 12 = 12 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k - 12 = 12 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} - 12$

$= 12 \times \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) - 12 = 16 - \frac{16}{4^{n+1}} - 12 = 4 - \frac{1}{4^{n-1}}$

b) $4 - \frac{1}{4^{n-1}} > 3.9999 \Leftrightarrow -\frac{1}{4^{n-1}} > -0.0001 \Leftrightarrow \frac{1}{4^{n-1}} < 0.0001 \Leftrightarrow 4^{n-1} > 10000$

$\Leftrightarrow (n-1)\ln(4) > \ln(10000) \Leftrightarrow n - 1 > \frac{\ln(10000)}{\ln(4)} \Leftrightarrow n > 1 + \frac{\ln(10000)}{\ln(4)}$

C_n : Posons j = k – 4 (donc k = j + 4) $C_n = \sum_{j=0}^{n-4} (-2)^{j+2} = (-2)^2 \sum_{j=0}^{n-4} (-2)^j = 4 \times \frac{1-(-2)^{n-3}}{1-(-2)}$

$= \frac{4}{3}(1 - (-2)^{n-3})$

Exercice 5

1) a) $\forall k \geq 1, \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$

b) Donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$ (sommes télescopiques)

$= (\ln(2) + \ldots + \ln(n) + \ln(n+1)) - (\ln(1) + \ln(2) + \ldots + \ln(n)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$

2) a) Posons $f(t) = t - \ln(1+t)$ sur $[0; +\infty[$ Alors $f'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{1+t-1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$

t	0	+ ∞
f '(t)	+	
f(t)	0 ↗	

$f(0) = 0 - \ln(1+0) = 0$

D'après le tableau de variations, le minimum de f sur $[0; +\infty[$ est 0.

Donc $\forall t \in [0; +\infty[$ $t \geq \ln(1+t)$

b) En particulier, on a $\forall k \geq 1, \frac{1}{k} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ $T_n \geq \ln(n+1)$.