ECE1 : Devoir à la maison n°9

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$, 0 la matrice nulle de $M_3(\mathbb{R})$.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}_1$ suivant :
$\mathcal{E}_1 = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = M\}$

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Résoudre le système AX = X et déterminer une base de l'ensemble des solutions.

2. a) Déterminer PQ. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b) Déterminer AP et PD. En déduire l'expression de A en fonction de P, D et P^{-1}.

3. Montrer que $\mathcal{E}_1$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

4. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.

a) Montrer : $M \in \mathcal{E}_1 \Leftrightarrow DN = N$.

b) Montrer que DN = N si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) En déduire l'expression générale des matrices de $\mathcal{E}_1$ et déterminer une base et la dimension de $\mathcal{E}_1$.