ECE1 : Correction du D.M. n°9

1) $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - z = x \\ x \quad - z = y \\ 2x - 2y \quad = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ z = 0 \quad L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ Donc $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Le vecteur est non nul, donc c'est une base de $\mathcal{S}$.

2) a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ PQ = I donc P est inversible et $P^{-1} = Q$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc AP = PD ($\times P^{-1}$ à droite) $A = PDP^{-1}$.

3) _ $A \times 0 = 0$ donc $0 \in E_1$

_ si $M \in E_1$ et $M' \in E_1$: $AM = M$ et $AM' = M'$

Donc $A(M + M') = AM + AM' = M + M'$ donc $M + M' \in E_1$.

_ si $M \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ $(AM = M)$

Donc $A(\lambda M) = \lambda(AM) = \lambda M$ donc $\lambda M \in E_1$. Donc E_1 est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

4) a) $M \in E_1 \Leftrightarrow AM = M \Leftrightarrow PDP^{-1}M = M \Leftrightarrow P^{-1}PDP^{-1}M = P^{-1}M$ ($\times P^{-1}$ à gauche)

$\Leftrightarrow DP^{-1}M = P^{-1}M \Leftrightarrow DN = N$.

b) Posons $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $\qquad DN = N \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = 0 \\ 2g = g \\ 2h = h \\ 2i = i \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = g = h = i = 0$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

c) $M \in E_1 \Leftrightarrow DN = N \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Or $N = P^{-1}M \Leftrightarrow PN = PP^{-1}M$ ($\times$ P à gauche) $\Leftrightarrow M = PN$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}$

$= \text{Vect}(E_1, E_2, E_3)$ avec $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De plus $aE_1 + bE_2 + cE_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ la famille est libre. Donc (E_1, E_2, E_3) forme une base de $\mathcal{E}_1$.

$\dim(\mathcal{E}_1) = 3$.