

ECE1 : Devoir à la maison n°8

Soit u la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = -1 \\ \text{pour tout entier } n : u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de u_n en fonction de n .

On note pour tout entier n : $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer une matrice M telle que pour tout entier n , $V_{n+1} = M \cdot V_n$.
- b) Démontrer que, pour tout entier n : $V_n = M^n \cdot V_0$.
2. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = N + D$.
 - a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
 - b) Montrer que $M = P \cdot B \cdot P^{-1}$
 - c) En déduire M^n en fonction de B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. a) Calculer N^2 et en déduire la valeur de N^n pour tout n entier supérieur ou égal à 2.
- b) En déduire la valeur de B^n en fonction de n , pour $n \geq 1$.
- c) Calculer enfin V_n puis u_n en fonction de n .

ECE1 : Devoir à la maison n°8

Soit u la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = -1 \\ \text{pour tout entier } n : u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de u_n en fonction de n .

On note pour tout entier n : $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer une matrice M telle que pour tout entier n , $V_{n+1} = M \cdot V_n$.
- b) Démontrer que, pour tout entier n : $V_n = M^n \cdot V_0$.
2. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = N + D$.
 - a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
 - b) Montrer que $M = P \cdot B \cdot P^{-1}$
 - c) En déduire M^n en fonction de B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. a) Calculer N^2 et en déduire la valeur de N^n pour tout n entier supérieur ou égal à 2.
- b) En déduire la valeur de B^n en fonction de n , pour $n \geq 1$.
- c) Calculer enfin V_n puis u_n en fonction de n .