

ECE1 Devoir à la maison n°7

On note $\beta = \frac{1}{9} e^{1/3}$. On a : $\beta \approx 0,155$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1-x}{3} e^x$.

- 1°) a. Etudier les branches infinies de f en $+\infty$ et $-\infty$
b. Etudier les variations de f .
c. Etudier la convexité de f . (on précisera les coordonnées du point d'inflexion)
d. Tracer la courbe de f dans un repère bien choisi.

(on donne $\frac{1}{3e} \approx 0,123$)

2°) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution et une seule a sur $[0;1]$.

Vérifier que $a \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

3°) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ déterminée par $u_0 = \frac{1}{3}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

b. Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $-\beta \leq f'(x) \leq 0$

c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leq \beta |u_n - a|$, puis que pour tout n , $|u_n - a| \leq \frac{1}{3} \beta^n$.

d. En déduire la limite de la suite u .