

Devoir à la Maison n°7 : Correction

Exercice 1

1) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{3} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$\frac{f(x)}{x} = \frac{1-x}{3x} e^x \sim_{+\infty} \frac{-x}{3x} e^x \sim_{+\infty} -\frac{1}{3} e^x$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

$f(x) = \frac{e^x - xe^x}{3}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (croissances comparées) donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

(C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

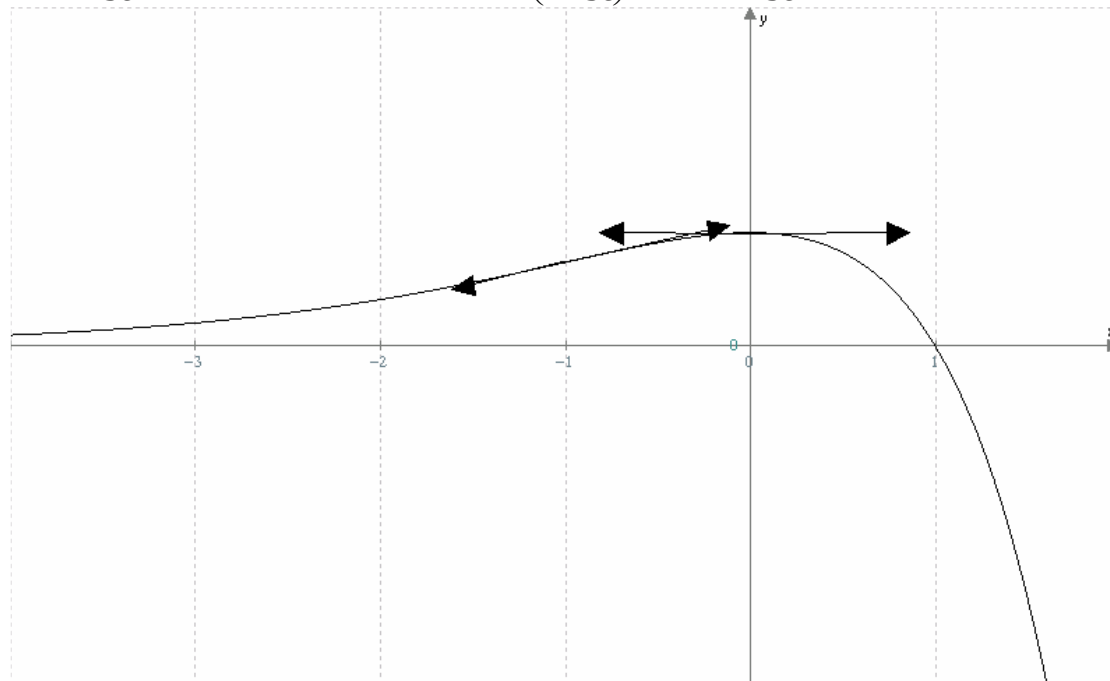
b) $f'(x) = -\frac{1}{3}e^x + \frac{1-x}{3}e^x = -\frac{xe^x}{3}$ du signe de $-x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow 1/3$	$\searrow -\infty$

c. $f''(x) = \frac{-e^x - xe^x}{3} = \frac{(-x-1)e^x}{3}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
convexité	convexe		concave

$f(-1) = \frac{2}{3e} \approx 0,25$ Un point d'inflexion : $\left(-1, \frac{2}{3e}\right)$ $f'(-1) = \frac{1}{3e} \approx 0,12$



2) Posons $g(x) = f(x) - x$ alors $g'(x) = f'(x) - 1 = -\frac{xe^x}{3} - 1$

Sur $[0;1] - \frac{xe^x}{3} \leq 0$ donc $g'(x) \leq -1 < 0$ $g(0) = \frac{1}{3}$ $g(1) = -1$.

g est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$. De plus $0 \in [-1; 1/3]$, donc l'équation $g(x) = 0$ ($\Leftrightarrow f(x) = x$) admet une unique solution a sur $[0;1]$.

De plus $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1-\frac{1}{3}}{3}e^{1/3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9}e^{1/3} - \frac{1}{3}$ $\frac{2}{9}e^{1/3} \approx 0,310$ donc $g\left(\frac{1}{3}\right) \approx -0,023$ $g\left(\frac{1}{3}\right) < 0$

$g(\alpha) = 0$ donc $g\left(\frac{1}{3}\right) \leq g(\alpha)$.

Comme g est décroissante, $\frac{1}{3} \geq \alpha$. Donc $a \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

2°) a) Par récurrence sur n :

– $u_0 = \frac{1}{3}$ donc $u_0 \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

– supposons que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$ f est décroissante sur $[0; 1/3]$

donc $f\left(\frac{1}{3}\right) \leq f(u_n) \leq f(0)$ $0 \leq \frac{2}{9}e^{1/3} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{3}$ donc $u_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

b. $f''(x) < 0$ sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ donc f' est décroissante sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

Donc $\forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $f'\left(\frac{1}{3}\right) \leq f'(x) \leq f'(0)$ $-\frac{1}{9}e^{1/3} \leq f'(x) \leq 0$. donc $-\beta \leq f'(x) \leq 0$.

c) $u_n \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $a \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ et sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $|f'(x)| \leq \beta$, donc d'après l'inégalité des accroissements

finis, $|f(u_n) - f(a)| \leq \beta |u_n - a|$ $|u_{n+1} - a| \leq \beta |u_n - a|$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leq \frac{1}{3} \beta^n$

– $|u_0 - a| = \left|\frac{1}{3} - a\right| = \frac{1}{3} - a \leq \frac{1}{3}$ (car $a \in [0; 1/3] \geq 0$) $\frac{1}{3} \beta^0 = \frac{1}{3}$

donc vrai au rang 0.

– supposons que $|u_n - a| \leq \frac{1}{3} \beta^n$,

$|u_{n+1} - a| \leq \beta |u_n - a| \leq \beta \times \frac{1}{3} \times \beta^n = \frac{1}{3} \times \beta^{n+1}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n - a| \leq \frac{1}{3} \beta^n$

d. $-1 < \beta < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \beta^n = 0$

donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - a| = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.