

ECE1 : Devoir à la maison n°6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Etudier les branches infinies de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$

b) Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui détermine et affiche la première valeur de n telle que $|u_n - \ln(2)| \leq 10^{-4}$.

4) a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1 - x)e^x - 1$.

Dresser le tableau de variations de g .

b) Déterminer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. En déduire les variations de f .

c) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

d) Donner le tableau de variations de son application réciproque f^{-1} .

e) Quelles sont les propriétés de la courbe de f^{-1} ?