# ECE1 : Correction du D.M. n°6

1) f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues.

En 0 : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1}=1$

$f(0)=1$ donc f est continue en 0. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) $\dfrac{x}{e^x-1}\sim_{+\infty}\dfrac{x}{e^x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ (croissances comparées) donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

$C_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x-1=-1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x-1}=+\infty$ si $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{e^x-1}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$.

$f(x)-(-x)=\dfrac{x}{e^x-1}+x=\dfrac{x+x(e^x-1)}{e^x-1}=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ (croissances comparées)

donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)+x=0$. Donc $C_f$ admet en $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y=-x$.

3) a) Par récurrence : $u_0=1\neq 0$ donc vrai au rang 0.

Supposons que $u_n\neq 0$ alors $\dfrac{u_n}{e^{un}-1}\neq 0$ donc $u_{n+1}\neq 0$. Donc $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_n\neq 0$.

b)
```
program dm6;
var n : integer;      u : real;
begin
  n:=0;u:=1;
  repeat
     n := n + 1;
     u := u/(exp(u)-1);
  until abs(u-ln(2))<=1E-4;
  writeln('n vaut ',n);
  readln; end.
```

4)a) $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $g(x)=(1-x)e^x-1$ $g'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$ du signe de $-x$

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | 0 | – | |
| $g(x)$ | | ↗ | 0 | ↘ | |

b) Si $x\neq 0$, $f'(x)=\dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}=\dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$.

Or, d'après le tableau de variations précédent, $g(x)\leq 0$ $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Donc $\forall\, x\neq 0$, $f'(x)\leq 0$.

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | \|\| | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | 1 | ↘ | 0 |

c) f est continue sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante, et $f(\mathbb{R})=]0;+\infty[$. Donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$. Elle admet donc une application réciproque $f^{-1}$ de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

d) f est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc $f^{-1}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0}f^{-1}(x)=+\infty$

| x | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f^{-1}(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |

e) $C_{f-1}$ est l'image de $C_f$ par la symétrie d'axe la droite d'équation $y=x$.

Elle admet donc une asymptote verticale d'équation $x=0$ et une asymptote oblique d'équation $x=-y$ ($\Leftrightarrow y=-x$).