

Exercice 1

1) A chaque tirage, on a une probabilité d'obtenir une boule rouge de $\frac{1}{3}$.

Les deux tirages sont indépendants. Donc X_n suit la loi binomiale $B(2, 1/3)$.

$$\text{Donc } P(X_n = 0) = \binom{2}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad P(X_n = 1) = \binom{2}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{4}{9}$$

$$P(X_n = 2) = \binom{2}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{9}.$$

2) Il y a $3n$ boules en tout. La proportion de boules rouges est $\frac{1}{3}$.

Les deux tirages sont sans remise, donc Y_n suit la loi hypergéométrique $H(3n, 2, 1/3)$.

$$\text{Donc } P(Y_n = 0) = \frac{\binom{n}{0} \binom{2n}{2}}{\binom{3n}{2}} = \frac{1 \times \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}}{\frac{(3n)!}{2!(3n-2)!}} = \frac{2n(2n-1)}{3n(3n-1)} = \frac{2(2n-1)}{3(3n-1)}$$

$$P(Y_n = 1) = \frac{\binom{n}{1} \binom{2n}{1}}{\binom{3n}{2}} = \frac{n \times 2n}{\frac{3n(3n-1)}{2}} = \frac{4n}{3(3n-1)}$$

$$P(Y_n = 2) = \frac{\binom{n}{2} \binom{2n}{0}}{\binom{3n}{2}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{3n(3n-1)}{2}} = \frac{n-1}{3(3n-1)}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(2n)}{3(3n)} = \frac{4}{9} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n = 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{9n} = \frac{4}{9}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n = 2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{9n} = \frac{1}{9}. \text{ On retrouve les probabilités d'un tirage sans remise.}$$

Quand il y a un grand nombre de boules, qu'on remette la première boule tirée dans l'urne ou pas avant le deuxième tirage n'influe presque pas sur les probabilités.

Exercice 2

1. Dans la méthode du pooling, on teste :

_ les n mélanges des n groupes

_ pour les X groupes dont le test H_i est positif, on teste les c échantillons du groupe.

Donc $T = n + cX$.

2. Le test de H_i est négatif si les c échantillons mélangés sont négatifs.

Si $N_1, \dots, N_c$ sont les événements signifiant que les c échantillons sont négatifs,

$\overline{H_i} = N_1 \cap \dots \cap N_c$. Les événements sont indépendants. Donc $P(\overline{H_i}) = q^c$

3. Chaque mélange H_i a une probabilité $1 - q^c$ d'être positif.

Les mélanges étant indépendants, X suit la loi binomiale $B(n, 1 - q^c)$.

Donc $E(X) = n \times (1 - q^c)$

$$4. E(T) = n + cE(X) = n + cn(1 - q^c) = \frac{N}{c} + N(1 - q^c).$$

Par la première méthode, on effectue N tests. La deuxième est donc avantageuse si $E(T) < N$

$$\text{et } E(T) < N \Leftrightarrow \frac{N}{c} + N(1 - q^c) < N \Leftrightarrow \frac{1}{c} + 1 - q^c < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{c} - q^c < 0 \Leftrightarrow q^c > \frac{1}{c} \Leftrightarrow q > \frac{1}{c^{1/c}}.$$