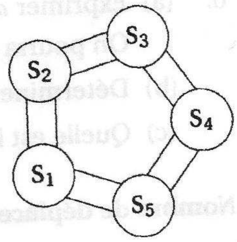
ECE1 : Devoir à la maison n°4

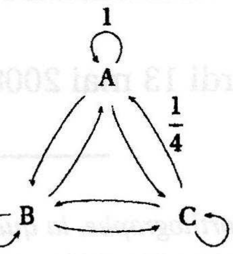
Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 disposés en pentagone et reliés par des routes, comme I'illustre le schéma ci-contre.



Ils arrivent au rendez-vous à I'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_l se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.

Ils décident alors de partir à la recherche I'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes :
_ à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur I'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables;
_ les déplacements des deux personnes se font simultanément;
_ tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.
Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

Pour tout entier naturel n, on définit les trois événements A_n, B_n, C_n :
_ A_n : " les deux personnes sont sur le même site après le $n^{ème}$ déplacement"
_ B_n : " les deux personnes sont sur des sites adjacents après le $n^{ème}$ déplacement"
_ C_n : " les deux personnes sont à deux routes de distance après le $n^{ème}$ déplacement."
On note a_n, b_n, c_n les probabilités des événements A_n, B_n, C_n.
l. Justifier que A_n, B_n, C_n forment un système complet d'événements.
2. Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.
3. (a) Montrer: $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$.
(b) Justifier : $P_{A_n}(A_{n+1}) = l$.
(c) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles analogues.
On représentera les résultats en reproduisant et complétant le schéma suivant :



4. Établir les relations suivantes pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}$

5. (a) Déterminer une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.
(b) En déduire qu'il existe des réels α, β, λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$
Déterminer α et β.
(c) En déduire l'expression de c_n en fonction de n, λ et μ .
(d) Exprimer a_n en fonction de n, λ et μ.
(On pourra s'intéresser à la somme $a_n + b_n + c_n$).
6. Déterminer la limite des suites $(a_n)_{n\in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.