

ECE1 : Devoir à la maison n°3

Exercice 1 (Constante d'Euler)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)$ et $v_n = u_n - \ln(n)$.

On admet que $\forall x \in]0; +\infty[, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

1. a) A l'aide de l'inégalité précédente, montrer que $\forall n \geq 2, \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$
b) En déduire que $\forall n \geq 1, v_n \geq 0$
2. Etudier le sens de variation de (v_n) .
3. En déduire que (v_n) converge vers une constante γ , qu'on ne cherchera pas à calculer.
(γ est appelée la constante d'Euler).
4. En remarquant que $\forall n \geq 1, u_n = v_n + \ln(n)$, déterminer la limite de (u_n) et un équivalent simple de (u_n) .

Exercice 2

Soit $n \geq 3$. On considère 3 boules A, B et C à placer dans n tiroirs numérotés de 1 à n .

1. Dans cette question, chaque tiroir ne peut recevoir au plus qu'une boule.
Déterminer le nombre de répartitions possibles.
2. Dans cette question chaque tiroir peut recevoir de 0 à 3 boules.
 - a) Déterminer le nombre de répartitions possibles.
 - b) Déterminer le nombre de répartitions où le tiroir n°1 contient au moins une boule.
 - c) Déterminer le nombre de répartitions où un seul tiroir contient des boules.
 - d) Déterminer le nombre de répartitions où exactement deux tiroirs contiennent des boules.