## ECE1 : Correction du Devoir à la maison n°3

**Exercice 1**

1) a) $\forall\, k \in \{1, \ldots, n-1\}\ \ \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

$(\ln(2) + \ldots + \ln(n-1) + \ln(n)) - (\ln(1) + \ln(2) + \ldots + \ln(n-1)) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

$\ln(n) - \ln(1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ (somme télescopique) $\ \ \ln(n) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

**OU** : Par récurrence : _ pour n = 2 $\quad \ln(2) \approx 0{,}69 \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{2-1} \frac{1}{k} = 1 \quad \ln(2) \leq 1$ donc vrai au rang 2.

_ supposons que : $\ln(n) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ On sait que : $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$

Par somme des deux inégalités : $\ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$

$\ln(n+1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $\qquad$ Conclusion : $\forall\, n \geq 2,\ \ln(n) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

b) $\forall\, n \geq 1,\ v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \ln(n)$ $\quad$ Or d'après la question 2, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n) \geq 0$ donc $v_n \geq \dfrac{1}{n} \geq 0$

2) $v_{n+1} - v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k}\right) - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$

Or $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$, donc $\dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0$ $\ (v_n)$ est décroissante.

3) $(v_n)$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. On note $\gamma$ sa limite.

4) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + \ln(n)$. $\ \displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = \gamma,\ \lim_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

De plus $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{v_n}{\ln(n)} = 0$ donc $v_n =_{+\infty} o(\ln(n))$. Donc $u_n \sim_{+\infty} \ln(n)$

**Exercice 2**

1) Pour chaque boule, on choisit un tiroir. On ne peut pas choisir deux fois le même tiroir. Donc il y a : $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$ possibilités.

2) a) Pour chaque boule, il y a n choix possibles. En tout $n^3$ possibilités.

b) $T_1$ vide : $(n-1)^3$ possibilités. Donc au moins une boule : $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$ possibilités.

**OU :** 1 boule dans $T_1$ : 3 (choix de la boule dans $T_1$) $\times\, (n-1)^2$ (place des autres boules)

2 boules dans $T_1$ : $\binom{3}{2}$ (choix des 2 boules dans $T_1$) $\times\, (n-1)$ (place de la 3ème boule)

3 boules dans $T_1$ : 1

En tout : $3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 = 3n^2 - 3n + 1$

**c)** Choix du tiroir : n possibilités, puis à chaque fois $1 \times 1 \times 1$ possibilité. En tout : n possibilités.

d) En tout : $n^3$ possibilités $\qquad$ Exactement un tiroir : n possibilités

Exactement trois tiroirs : $n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n$ possibilités (question 1)

Donc exactement deux tiroirs : $n^3 - n - (n^3 - 3n^2 + 2n) = 3n^2 - 3n = 3n(n-1)$.

**OU :** Choix d'un tiroir : n possibilités

Choix des deux boules qu'on met dans ce tiroir : $\binom{3}{2} = 3$ possibilités.

Choix d'un deuxième tiroir : n-1 possibilités. Puis on met la dernière boule dedans.

Donc $n \times 3 \times (n-1) = 3n(n-1)$ possibilités.