

ECE1 : Devoir à la maison n°2

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 3u_n}{3u_n^2 + 1}$$

1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}$

Déterminer les variations de f .

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = x$.

3) Que dire de la suite si $u_0 = 1$?

On suppose dans la suite que $u_0 = 2$.

4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.

5) Montrer que (u_n) est décroissante

6) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)^3}{3u_n^2 + 1}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{4}(u_n - 1)$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - 1 \leq \frac{1}{4^n}$