ECE1 : Correction du D.M. n°2

1) $f'(x) = \dfrac{(3x^2+3)(3x^2+1)-(x^3+3x)\times 6x}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{9x^4+3x^2+9x^2+3-6x^4-18x^2}{(3x^2+1)^2}$

$= \dfrac{3x^4-6x^2+3}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{3(x^4-2x^2+1)}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{3(x^2-1)^2}{(3x^2+1)^2}$

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$(x^2-1)^2$	$+$ $\quad 0 \quad$ $+$ $\quad 0 \quad$ $+$
$f'(x)$	$+$ $\quad 0 \quad$ $+$ $\quad 0 \quad$ $+$
$f(x)$	$\nearrow$

2) $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{x^3+3x}{3x^2+1} = x \Leftrightarrow x^3+3x = x(3x^2+1) \Leftrightarrow -2x^3+2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = 0, 1$ ou -1.

3) Si $u_0 = 1$, comme $f(1) = 1$ (u_n) est constante.

4) a) Par récurrence : _ $u_0 = 2$ donc $1 \le u_0 \le 2$

_ supposons que $1 \le u_n \le 2$. f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(1) \le f(u_n) \le f(2)$

$f(1) = 1 \quad f(2) = \dfrac{14}{13} \qquad 1 \le u_{n+1} \le \dfrac{14}{13} \le 2$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \le u_n \le 2$.

5)a)$\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^3+3u_n}{3u_n^2+1} - \dfrac{u_n(3u_n^2+1)}{3u_n^2+1} = \dfrac{-2u_n^3+2u_n}{3u_n^2+1} = \dfrac{2u_n(1-u_n^2)}{3u_n^2+1} = \dfrac{2u_n(1+u_n)(1-u_n)}{3u_n^2+1}$

$1 \le u_n \le 2$ donc $2u_n \ge 0$, $1 + u_n \ge 0$ et $1 - u_n \le 0$ donc $u_{n+1} - u_n \le 0$. (u_n) est décroissante.

(ou par récurrence, montrer que : $u_{n+1} \le u_n$).

6) a) $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n^3+3u_n}{3u_n^2+1} - \dfrac{3u_n^2+1}{3u_n^2+1} = \dfrac{u_n^3-3u_n^2+3u_n-1}{3u_n^2+1}$

Or $(u_n-1)^3 = u_n^3 - 3u_n^2 + 3u_n - 1$ donc $\quad u_{n+1} - 1 = \dfrac{(u_n-1)^3}{3u_n^2+1}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{(u_n-1)^2}{3u_n^2+1} \times (u_n - 1)$

$u_n \ge 1$ donc $u_n^2 \ge 1 \quad 3u_n^2 + 1 \ge 4 \quad \dfrac{1}{3u_n^2+1} \le \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{(u_n-1)^2}{3u_n^2+1} \le \dfrac{(u_n-1)^2}{4}$ $\quad$ or $0 \le u_n - 1 \le 1$ donc $(u_n-1)^2 \le 1$ et $\dfrac{(u_n-1)^2}{3u_n^2+1} \le \dfrac{1}{4}$

donc $u_{n+1} - 1 \le \dfrac{1}{4}(u_n - 1)$

c) On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \ge 1$ donc $u_n - 1 \ge 0$. On montre l'autre inégalité par récurrence :

_ pour $n = 0$: $u_0 - 1 = 2 - 1 = 1 \qquad \dfrac{1}{4^0} = 1$ donc vrai au rang 0.

_ supposons que $u_n - 1 \le \dfrac{1}{4^n}$ alors $u_{n+1} - 1 \le \dfrac{1}{4}(u_n - 1) \le \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4^n}$

$u_{n+1} - 1 \le \dfrac{1}{4^{n+1}}$ la propriété est héréditaire. $\qquad$ Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n - 1 \le \dfrac{1}{4^n}$.