ECE1 : Correction du D.M. n°11 (librement inspiré de ESC2008)

1. A chaque lancer, A a une probabilité de 1/3 de faire pile. Les lancers sont indépendants. X est le rang du premier succès. Donc $X \longrightarrow G(1/3)$. De la même manière, $Y \longrightarrow G(p)$.

$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. $\forall k \geq 1$, $P(X = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}$ $\quad P(Y = k) = (1 - p)^{k-1}p$

$E(X) = \frac{1}{1/3} = 3$ $\quad E(Y) = \frac{1}{p}$ $\quad V(X) = \frac{1 - 1/3}{1/3^2} = \frac{2}{3} \times 9 = 6$ $\quad V(Y) = \frac{1 - p}{p^2}$

2 a) $Z = Y - X$ donc $E(Z) = E(Y) - E(X) = \frac{1}{p} - 3 = \frac{1 - 3p}{p}$

b) $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}(1 - p)^{k-1}p = \frac{p}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2(1 - p)}{3}\right)^{k-1}$

$= \text{(avec } k' = k - 1) \ \frac{p}{3}\sum_{k'=0}^{+\infty}\left(\frac{2(1 - p)}{3}\right)^{k'} = \frac{p}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2 - 2p}{3}} = \frac{p}{3} \times \frac{3}{1 + 2p} = \frac{p}{1 + 2p}$

$P(Z = 0) = P(Y = X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) = \frac{p}{1 + 2p}$ (X, Y indep)

(c) $(Z = n) = \cup_{k=1}^{+\infty} ((X = k) \cap (Y = n + k))$

Donc $P(Z = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = n + k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = n + k)$ (X et Y indép.)

$P(Z = n) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}(1 - p)^{n+k-1}p = (1 - p)^n \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}(1 - p)^{k-1}p = (1 - p)^n \times \frac{p}{1 + 2p}$ (qu. (b)).

3. a) $(X \geq k)$ = "les k – 1 premiers sont des faces" $= F_1 \cap \dots \cap F_{k-1}$ donc $P(X \geq k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

De même $P(Y \geq k) = (1 - p)^{k-1}$.

U est le minimum de X et Y donc

$P(U \geq k) = P((X \geq k) \cap (Y \geq k)) = P(X \geq k)P(Y \geq k)$ (X, Y indépendants)

$= \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}(1 - p)^{k-1} = \left(\frac{2(1 - p)}{3}\right)^{k-1}$

b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(U = k) = P(U \geq k) - P(U \geq k + 1)$

$= \left(\frac{2(1 - p)}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{2(1 - p)}{3}\right)^{k} = \left(\frac{2(1 - p)}{3}\right)^{k-1}\left(1 - \frac{2(1 - p)}{3}\right) = \left(\frac{2(1 - p)}{3}\right)^{k-1}\frac{1 + 2p}{3}$

Donc $U \longrightarrow G\left(\frac{1 + 2p}{3}\right)$.