ECE1 : Devoir à la maison n°10

Exercice 1

On considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$, et on note $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$ la somme partielle de cette série.

1) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$, $2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.

2) En déduire que $\forall N \geq 1$, $S_N \geq 2\sqrt{N+1} - 2$.

3) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est-elle convergente ?

Exercice 2

Deux joueurs de tennis sont à "quarante partout". Pour chaque échange, A gagne le point avec une probabilité $p = 1/3$. B gagne donc le point avec une probabilité $q = 2/3$.
On rappelle qu'un joueur gagne le jeu quand il marque deux points de plus que l'autre.
On supposera les échanges indépendants les uns des autres.
Pour $k \in \mathbb{N}$, notons E_{2k}= "Les joueurs sont à égalité après 2k échanges"
A_{2k+2} = "A gagne après 2k+2 échanges"

1) a) Quelle est la probabilité d'être à égalité au bout de 2 échanges ?
b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(E_{2k}) = \left(\frac{4}{9}\right)^k$
c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $P(A_{2k+2})$.
2) Déterminer la probabilité que A gagne le jeu.
3) Déterminer la probabilité que le jeu ne se termine jamais.