ECE1 : Correction du D.M. n°10

Exercice 1

1) Posons $f(t) = 2\sqrt{t}$ sur $[x; x+1]$. f est dérivable sur $[x; x+1]$ et $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

Sur $[x; x+1]$ $x \le t \le x+1$ $\quad \sqrt{x} \le \sqrt{t} \le \sqrt{x+1} \quad \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \le \dfrac{1}{\sqrt{t}} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad f'(t) \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

D'après l'inégalité des accroissements finis sur $[x; x+1]$:

$f(x+1) - f(x) \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}(x+1-x) \qquad 2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ge 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \ge \sum_{n=1}^{N} (2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n})$

$S_N \ge 2\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \sqrt{n+1} - \sum_{n=1}^{N} \sqrt{n}\right)$

$S_N \ge 2(\sqrt{2} + \ldots + \sqrt{N} + \sqrt{N+1} - \sqrt{1} - \sqrt{2} \ldots - \sqrt{N})$

$S_N \ge 2(\sqrt{N+1} - 1)$

3) $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} 2(\sqrt{N+1} - 1) = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} S_N = +\infty$.

Donc la série $\displaystyle\sum_{n \ge 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Exercice 2

PA_i = "A gagne le i ème point" $\quad PB_i$ = "B gagne le i-ème point"

1) a) $Eg = (PA_1 \cap PB_2) \cup (PB_1 \cap PA_2)$ $\quad P(Eg) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{9}$

b) Pour être à égalité au bout de 2k parties, il faut être à égalité toutes les deux parties.

$E_{2k} = Eg_2 \cap Eg_4 \cap \ldots \cap Eg_{2k}$

$P(E_{2k}) = \dfrac{4}{9} \times \ldots \times \dfrac{4}{9} = \left(\dfrac{4}{9}\right)^k$

c) $A_{2k+2} = E_{2k} \cap PA_{2k+1} \cap PA_{2k+2}$ donc $P(A_{2k+2}) = \left(\dfrac{4}{9}\right)^k \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{4}{9}\right)^k \times \dfrac{1}{9}$

2) Soit A = "le joueur A gagne". $A = A_2 \cup A_4 \cup \ldots = \cup_{k=0}^{+\infty} A_{2k+2}$

Les événements sont incompatibles, donc : $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_{2k+2}) = \frac{1}{9} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k$

$= \dfrac{1}{9} \times \dfrac{1}{1 - \dfrac{4}{9}} = \dfrac{1}{9} \times \dfrac{9}{5} = \dfrac{1}{5}$.

3) Soit E = "le jeu se termine jamais". $E = E_2 \cap E_4 \cap \ldots = \cap_{k=1}^{+\infty} E_{2k}$

Or $E_{2(k+1)} \subset E_{2k}$. Donc (E_{2k}) est une suite décroissante d'événements.

Donc $P(E) = P(\cap_{k=1}^{+\infty} E_{2k}) = \displaystyle\lim_{k \to +\infty} P(E_{2k}) = \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k = 0$ car $-1 < \dfrac{4}{9} < 1$.

Donc le jeu se termine presque sûrement.