ECE1 : Correction du Devoir à la maison n°1

Exercice 1

Posons $X = x^2$ et étudions le polynôme $P(X) = 2X^3 - 5X^2 - 4X + 12$

2 est racine évidente, donc on peut factoriser par $X - 2$.

Donc $P(X) = (X - 2)(aX^2 + bX + c))$.

$= aX^3 + bX^2 + cX - 2aX^2 - 2bX - 2c = aX^3 + (b - 2a)X^2 + (c - 2b)X - 2c$

Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -5 \\ c - 2b = -4 \\ -2c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{cases} \text{ donc } 2X^3 - 5X^2 - 4X + 12 = (X - 2)(2X^2 - X - 6)$$

2 est encore racine évidente, donc $P(X) = (X - 2)(X - 2)(2X + 3)$

$2x^6 - 5x^4 - 4x^2 + 12 = (x^2 - 2)^2(2x^2 + 3) = (x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2(2x^2 + 3)$ et $2x^2 + 3$ ne peut pas se factoriser.

Exercice 2

1) $f'(x) = \dfrac{(2x + 2)(x + 1) - (x^2 + 2x + 5)}{(x + 1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$ = (1 racine évidente) = $\dfrac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 1)^2}$

x	-1		1		$+\infty$
$x^2 - 2x + 3$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	4	$\nearrow$	

$f(1) = 4$: le minimum de f sur $]-1; +\infty[$ est 4, donc $\forall\ x > -1$, $f(x) \geq 4$.

OU : $f(x) - 4 = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x + 1} - 4 = \dfrac{x^2 + 2x + 5 - 4(x + 1)}{x + 1} = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} = \dfrac{(x - 1)^2}{x + 1} \geq 0$ sur $]-1; +\infty[$.

Donc $f(x) \geq 4\ \forall\ x > -1$.

2) $f(x) > \dfrac{13}{3} \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x + 1} - \dfrac{13}{3} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{3(x^2 + 2x + 5) - 13(x + 1)}{x + 1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x + 1} > 0$

2 est racine évidente donc : $\dfrac{(x - 2)(3x - 1)}{x + 1} > 0$ donc racines du polynôme : 2 et 1/3

x	-1		$1/3$		2		$+\infty$
$3x^2 - 7x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x + 1$		$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x + 1}$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S =]-1;\frac{1}{3}[\cup]2; +\infty[$.

3) a) $ax + b + \dfrac{c}{x + 1} = \dfrac{ax(x + 1) + b(x + 1) + c}{x + 1} = \dfrac{ax^2 + (a + b)x + b + c}{x + 1}$

Par identification des coefficients : $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 2 \\ b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}$ donc $f(x) = x + 1 + \dfrac{4}{x + 1}\ \forall\ x > -1$

b) Donc $f(x) - (x + 1) = \dfrac{4}{x + 1} > 0$ sur $]-1; +\infty[$ donc $f(x) > x + 1$ sur $]-1; +\infty[$.