

Chapitre 9 : Variables aléatoires finies : Feuille d'exercices n°1

Exercice 1

Un paquet de 10 cartes contient 5 as, 3 rois et 2 dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi rapporte 2 points et celui d'une dame coûte 1 point.

1) On extrait une carte du paquet. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de points marqués. Déterminer la loi de X .

2) On extrait maintenant 2 cartes simultanément et au hasard. On désigne par Y la V.A.R. égale au total des points marqués. Déterminer la loi de Y .

Exercice 2 On lance 3 fois une pièce dont la probabilité de faire pile est $p = \frac{2}{3}$.

On note X le nombre de piles obtenus après ces 3 lancers. Déterminer la loi de X .

Exercice 3 Une urne contient 4 boules rouges et 3 boules bleues.

On tire simultanément cinq boules de cette urne. Soit X le nombre de boules rouges tirées.

1) Déterminer $X(\Omega)$

2) Déterminer la loi de X .

Exercice 4 On considère deux urnes U_1 et U_2 :

L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 3 noires.

L'urne U_2 contient 3 boules blanches et 7 noires.

Tous les tirages sont avec remise. On choisit une urne au hasard, et on tire une boule dedans.

Si l'on obtient une boule blanche, le tirage suivant se fait dans U_1 . Sinon, il se fait dans U_2 .

On répète plusieurs fois cette expérience.

On considère la variable aléatoire X_i définie par :

$X_i = 1$ si l'on obtient une boule blanche au i -ème tirage et $X_i = 0$ sinon.

1. Donner la loi de X_1 .

2. Montrer que la suite $(P(X_i = 0))_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

3. a) Donner l'expression de $P(X_i = 0)$ en fonction de i puis celle de $P(X_i = 1)$.

b) Calculer $\lim_{i \rightarrow +\infty} P(X_i = 0)$ et $\lim_{i \rightarrow +\infty} P(X_i = 1)$. Interprétation du résultat ?

Exercice 5

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On tire 2 boules successivement et avec remise. Soit X le plus grand des nombres obtenus. Soit Y le plus petit des nombres obtenus.

1) Déterminer $P(X \leq k)$ pour $k \in \{1, \dots, N\}$. En déduire la loi de X .

2) a) Déterminer $P(Y \geq k)$ pour $k \in \{1, \dots, N\}$.

b) Quelle relation existe-t-il entre $P(Y \geq k)$, $P(Y \geq k + 1)$ et $P(Y = k)$?

En déduire la loi de Y .

Exercice 6 (Ecricome 2007)

Dans un magasin, la probabilité qu'un client règle par carte bancaire est $p = 3/5$.

On suppose que les modes de règlements sont indépendants entre les individus.

Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n \geq 2$).

On définit deux variables aléatoires L_1 et L_2 , par :

L_1 (resp. L_2) est égale au rang du 1^{er} (resp. du 2^{ème}) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp. au moins deux) et à zéro sinon.

1) Déterminer la loi de L_1 et vérifier que $\sum_{k=0}^n P(L_1 = k) = 1$

2) Déterminer la loi de L_2 .