

Chapitre 9 : Variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini

Dans tout ce chapitre, on considère un espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), P)$ fini.
Les définitions générales, et les propriétés générales des Variables Aléatoires Réelles Discrètes seront vues ultérieurement.

1. Notion de V.A.R.F.

1.1 Définition d'une V.A.R.F.

Définition : Une variable aléatoire réelle est une application qui à chaque élément de Ω associe un nombre réel.

Si X est une V.A.R., $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par X .

On note en général, $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, où I est une partie finie de \mathbb{N} ou \mathbb{Z}

Si X est à valeurs entières (c'est très souvent le cas), on note $X(\Omega) = \{i, i \in X(\Omega)\}$

Si $x \in \mathbb{R}$, on note $(X = x)$ l'événement "X vaut x". De même pour $(X \leq x)$, $(X < x)$, etc...

Exemple :

On lance 3 fois une pièce de monnaie. Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de "piles" obtenus.

$$\text{card}(\Omega) = 2^3 = 8.$$

$$X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$$

$$(X = 2) = \{PPF, PFP, FFP\} \quad (X \leq 1) = \{FFF, PFF, FPF, FFP\}$$

Propriété :

Soit X une V.A.R.D. telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$

Alors la famille $(X = x_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements de Ω .

En effet, si $i \neq j$, $(X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset$ et $\Omega = \cup_{i \in I} (X = x_i)$

Remarque : On a donc toujours $\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$.

1.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition : Soit X une V.A.R.D.

On appelle loi de probabilité de X l'ensemble des couples $(x_i, P(X = x_i))$ où $x_i \in X(\Omega)$.

En d'autres termes, donner la loi de probabilité d'une V.A.R.D., c'est donner l'ensemble des $\{x_i\}$ et la probabilité de chaque $P(X = x_i)$, pour $i \in I$.

Quand I n'est pas trop grand, on peut donner les résultats dans un tableau. Sinon, on donne une formule pour $P(X = x_i)$.

Si X est à valeurs entières, on cherche $P(X = i)$ pour $i \in X(\Omega)$.

Attention à bien repérer dans l'énoncé la définition de X , pour pouvoir trouver sa loi. ("X est le nombre de ...")

Exemples :

1) Dans l'exemple d'avant : Loi de probabilité de $X : X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

2) On lance un dé équilibrée n fois. On note X le nombre de six obtenus.

Loi de $X : X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Pour $k \in \{0, \dots, n\}$ ($X = k$) = "on obtient k fois 6, et $n - k$ fois 1,2,3,4 ou 5 "

$\text{card}(\Omega) = 6^n$

$\text{card}(X = k) = \binom{n}{k} \times 5^{n-k}$ (choix des k lancers parmi les n , choix des résultats des $n - k$ autres

lancers). Donc $P(X = k) = \frac{\binom{n}{k} 5^{n-k}}{6^n}$

1.3 Fonction de répartition d'une V.A.R. discrète

Définition : Soit X une V.A.R. discrète.

On appelle fonction de répartition de X la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$

Remarque : Si X est à valeurs entières, on s'intéresse plutôt à $P(X \leq k)$, pour $k \in \mathbb{N}$.

Propriété :

Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors $\forall k \in \mathbb{N}, P(X \leq k) = P(X= 0) + \dots + P(X = k) = \sum_{i=0}^k P(X = i)$

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1). \quad (= F_X(k) - F_X(k - 1))$$

Démonstration :

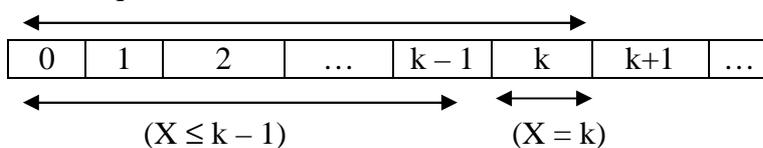
$(X \leq k) = (X = 0) \cup (X = 1) \cup \dots \cup (X = k)$ et la réunion est disjointe, donc

$P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = k)$.

$(X \leq k) = (X \leq k - 1) \cup (X = k)$, et la réunion est disjointe, donc

$P(X \leq k) = P(X \leq k - 1) + P(X = k)$ donc $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$.

Remarques : $(X \leq k)$



_ Il existe des formules analogues pour $P(X \geq k)$, $P(X > k)$, $P(X < k)$

_ Dans le cas où X est défini comme un maximum de plusieurs nombres, il est plus facile de calculer d'abord $P(X \leq k)$, puis $P(X = k)$. (le plus grand nombre $\leq k \Leftrightarrow$ tous les nombres $\leq k$).

Si X défini comme un minimum, utilisez plutôt $P(X \geq k)$.

Exemple : Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire simultanément deux boules de l'urne. Soit X le plus grand des numéros tirés. $X(\Omega) = \{2, \dots, n\}$.

$\forall k \in \{2, \dots, n\}, (X \leq k) =$ " les deux boules sont inférieures ou égales à k ".

$$\text{card}(\Omega) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad P(X \leq k) = \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{\frac{k(k-1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$\text{donc } P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$$

1.4 Fonction d'une V.A.R.D.

Propriété :

Soit X une V.A.R.D. et g une fonction définie sur $X(\Omega)$.

Alors $Y = g(X)$ est une variable aléatoire réelle discrète.

Si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, alors $Y(\Omega) = \{g(x_i), i \in I\}$. (attention les $g(x_i)$ ne sont pas forcément distincts).

Remarque : Pour déterminer la loi de Y , on peut utiliser que $P(Y = y) = P(g(X) = y)$ et résoudre l'équation $g(X) = y$.

Exemple :

Soit X une VAR de loi :

x	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	1/8	1/4	1/8	1/8	3/8

$$\text{Sont } Y = X^2 \quad \text{Alors } Y(\Omega) = \{0,1,4\} \quad P(Y = 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

$$P(Y = 1) = P(X^2 = 1) = P(X = 1) + P(X = -1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(Y = 4) = P(X^2 = 4) = P(X = 2) + P(X = -2) = \frac{1}{2}$$

2. Espérance et moments d'une V.A.R.D.

2.1 Espérance d'une V.A.R.D.

Définition :

Soit X une VARD telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$. (I partie finie de \mathbf{N})

Alors on appelle espérance de X , le réel $E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$

Remarques :

_ Si X est à valeurs dans \mathbf{N} , $E(X) = \sum_{i \in X(\Omega)} iP(X = i)$

_ $E(X)$ représente la "valeur moyenne" prise par X . Il faut toujours penser à vérifier la cohérence du résultat.

Exemples :

1) Suite exemple d'avant : on lance 3 fois une pièce de monnaie. X = nombre de piles :

$$X(\Omega) = \{0, \dots, 3\} \quad E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

2) 2^{ème} exemple : $X(\Omega) = \{2, \dots, n\}$, et $\forall k \in \{2, \dots, n\}$, $P(X = k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$

$$E(X) = \sum_{k=2}^n kP(X = k) = \sum_{k=2}^n \frac{2k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=2}^n k^2 - \sum_{k=2}^n k \right)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 - \frac{n(n+1)}{2} + 1 \right) = \frac{2}{n(n-1)} n(n+1) \frac{2n+1-3}{6}$$

$$= \frac{2(n+1)(2n-2)}{6(n-1)} = \frac{2(n+1)}{3}$$

Propriété : Linéarité de l'espérance :

Soient X et Y deux V.A.R et λ un réel.

Alors $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

$$E(\lambda X) = \lambda E(X).$$

Remarque : En particulier, si a et b sont des réels, $E(aX + b) = aE(X) + b$.
(car $E(aX + b) = E(aX) + E(b) = aE(X) + b$)

Théorème de transfert :

Soit X une VARD, $(X(\Omega)) = \{x_i, i \in I\}$ et g une fonction de $X(\Omega)$ dans \mathbb{R} .

$$\text{Alors } E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i)P(X = x_i)$$

Remarque : Si $Y = g(X)$, comment calculer $E(Y)$?

_ si g est affine ($Y = aX + b$), alors $E(Y) = aE(X) + b$

_ sinon théorème de transfert

Exemples : Suites des exemples précédents : 1)

x	0	1	2	3
P(X = x)	1/8	3/8	3/8	1/8

$$Y = 2X - 5 \text{ Par linéarité de l'espérance : } E(Y) = 2E(X) - 5 = 2 \times \frac{3}{2} - 5 = -2$$

$Z = X^2$ $E(Z)$? Théorème de transfert :

$$E(Z) = E(X^2) = \sum_{i=0}^3 i^2 P(X=i) = \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 4 + \frac{1}{8} \times 9 = \frac{24}{8} = 3$$

$$2) E(X^2) = \sum_{k=2}^n k^2 P(X=k) = \sum_{k=2}^n \frac{2k^2(k-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=2}^n k^3 - \sum_{k=2}^n k^2 \right)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 1 \right)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n+1)(3n(n+1) - 2(2n+1))}{12} = \frac{(n+1)(3n^2 - n - 2)}{6(n-1)}$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)(3n+2)}{6(n-1)} = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}$$

2.2 Moment d'ordre r

Définition : Soit X une VARD. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

On appelle moment d'ordre r le réel $E(X^r)$

Remarques : _ Si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, d'après le théorème de transfert, $E(X^r) = \sum_{i \in I} x_i^r P(X = x_i)$

_ le moment d'ordre 1 de X est l'espérance de X

Exemple : Dans les exemples précédents, $m_2(X) = 3$ et $m_2(X) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}$.

2.3 Variance d'une VARD

Définition

Soit X une VARD.

On appelle variance de X le nombre réel $V(X) = E((X - E(X))^2)$ et écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Propriété : (Formule de Huygens)

Soit X une VARD. Alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Démonstration :

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2) = E(X^2) - E(2E(X)X) + E(E(X)^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Exemples : Suite exemples d'avant

1) On a vu que $E(X) = \frac{3}{2}$ et $E(X^2) = 3$

$$\text{Donc } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{Donc } \sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) On a vu que $E(X) = \frac{2(n+1)}{3}$ et $E(X^2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4(n+1)^2}{9} = \frac{(n+1)(9n+6-8n-8)}{18} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{18} \end{aligned}$$

Remarque : La variance (ou l'écart type) mesure la dispersion de la VAR (c'est-à-dire son écart par rapport à la valeur moyenne). Elle est toujours positive.

Propriété :

Soit X une V.A.R.D et $Y = aX + b$.

Alors $V(Y) = a^2V(X)$ et $\sigma(Y) = |a|\sigma(X)$

Démonstration :

$$\begin{aligned} Y &= aX + b \text{ donc } E(Y) = aE(X) + b \quad E(Y)^2 = (aE(X) + b)^2 = aE(X)^2 + 2abE(X) + b^2 \\ Y^2 &= (aX + b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2 \quad \text{Donc } E(Y^2) = a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 \\ V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 = a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - (aE(X)^2 + 2abE(X) + b^2) \\ &= a^2E(X^2) - a^2E(X)^2 = a^2V(X) \quad \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{a^2V(X)} = |a|\sqrt{V(X)} = |a|\sigma(X). \end{aligned}$$

Exemple : Avec X du 1^{er} exemple. Posons $Y = 2X - 5$.

$$\text{On a vu que } E(Y) = 2E(X) - 5 = 2 \times \frac{3}{2} - 5 = -2 \quad V(Y) = 2^2V(X) = 4 \times \frac{3}{4} = 3.$$