Chapitre 8 : Probabilités conditionnelles : Feuille n°2

Exercice 1
Soit $n \geq 2$. On considère n urnes U_1 à U_n.
Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires.
1) On choisit une urne au hasard puis on tire une boule de cette urne.
Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note U_k l'événement "On choisit l'urne U_k et B l'événement "on tire une boule blanche"
a) Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer $P_{uk}(B)$.
b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
2) On choisit une urne au hasard puis on tire sans remise deux boules de cette urne.
Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?

Exercice 2
Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour d'ouverture de la réservation, et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante :
_ si la place est réservée le jour k, elle le sera encore le jour k+1 avec la probabilité $\frac{9}{10}$
_ si la place est libre le jour k, elle sera réservée le jour k+1 avec la probabilité $\frac{4}{10}$.
Pour k positif, on note R_k l'événement "la place est réservée le jour k" et r_k sa probabilité.
On suppose que $r_0 = 0$.
1. Exprimer r_{k+1} en fonction de r_k.
2. En déduire l'expression explicite de r_k en fonction de k, et calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} r_k = r$.

Exercice 3
Sur un étang, il y a trois nénuphars Na, Nb, Nc. Un crapaud se promène de nénuphar en nénuphar. A l'instant 0, il est sur Na. Ensuite, il se déplace selon les règles suivantes :
_ s'il est sur Na à l'instant n, il va indifféremment sur un des trois nénuphars à l'instant n + 1
_ s'il est sur Nb à l'instant n, il reste sur Nb à l'instant n + 1
_ s'il est sur Nc à l'instant n, il reste sur Nc avec une probabilité de 1/3, il va sur Na avec la probabilité de 1/12 et sur Nb avec une probabilité de 7/12.
On définit les événements A_n : "A l'instant n, le crapaud se trouve sur Na"
On définit de manière similaire B_n et C_n.
On pose $p_n = P(A_n)$, $q_n = P(B_n)$, $r_n = P(C_n)$.
1) Déterminer p_0, q_0, r_0.
2) a) Expliciter les probabilités conditionnelles $P_{An}(A_{n+1})$, $P_{Bn}(A_{n+1})$, $P_{Cn}(A_{n+1})$
b) En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n, q_n, r_n
c) De même, déterminer q_{n+1}, r_{n+1} en fonction de p_n, q_n, r_n.
3) a) En remarquant que $p_n = 3r_{n+1} - r_n$, déterminer l'expression de r_{n+2} en fonction de r_n et r_{n+1}.
b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.
4) Déterminer l'expression de p_n en fonction de n.
5) Que vaut $p_n + q_n + r_n$? En déduire q_n en fonction de n.
6) Déterminer les limites de p_n, q_n et r_n lorsque n tend vers l'infini.