Chapitre 8 : Conditionnement et indépendance

1. Probabilités conditionnelles

1.1 Définition d'une probabilité conditionnelle

Définition : Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ un espace probabilisé.
Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$.
Pour tout événement B, on appelle probabilité de B sachant A le réel $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$
$P_A(B)$ correspond à la probabilité de B sachant que A est réalisé.

Exemple :
Dans l'étude d'une maladie, on veut savoir si le fait d'être fumeur joue un rôle aggravant.
Une personne sur 10 est fumeuse.
Une personne sur 30 est fumeuse et malade.
Probabilité qu'un fumeur soit malade ? $P_F(M) = \dfrac{P(F \cap M)}{P(F)} = \dfrac{1/30}{1/10} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$

Remarques :
_ une probabilité conditionnelle est en particulier une probabilité. Elle admet donc toutes ses propriétés.
_ $P_A(B)$ est aussi noté $P(B/A)$
_ Attention à ne pas confondre $P(A \cap B)$ probabilité que A et B soient réalisés et $P_A(B)$, probabilité que B soit réalisé, sachant que A est réalisé.
_ Attention, le plus souvent, l'énoncé se traduit par la donnée de $P_A(B)$!
(notamment les phrases du type : "si …, alors …")

Propriété : Probabilité d'une intersection :
Soient A et B deux événements.
Si $P(A) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Démonstration : immédiate d'après définition

Exemple :
On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
U_1 contient 4 boules rouges et 3 boules vertes. U_2 contient 2 boules rouges et 1 boule verte.
On choisit une urne au hasard, puis une boule au hasard dans une urne.
On note U_1 = "on choisit l'urne U_1", U_2 = "on choisit l'urne U_2", R = "on choisit une boule rouge", V = "On choisit une boule verte
Déterminer $P_{U1}(R)$ et $P(U_1 \cap R)$
$P_{U1}(R) = \dfrac{4}{7}$ (probabilité qu'on tire une rouge sachant qu'on tire dans U_1)

$P(U_1 \cap R) = P(U_1)P_{U1}(R) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{2}{7}$ (probabilité qu'on choisisse U_1 et une rouge"

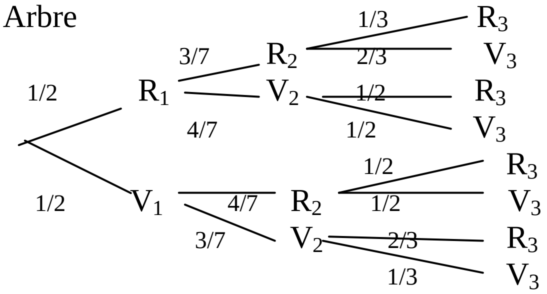
Remarque : si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$ (attention à ne pas tourner en rond)

1.2 Système complet d'événements / Arbre

Définition : Soient $A_1, A_2, \ldots A_p$ des événements d'un univers Ω.
On dit que $A_1, A_2, \ldots A_p$ forment un système complet d'événements (ou une partition de Ω) si
- pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ (ils sont 2 à 2 incompatibles)
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = \Omega$ (la réunion des ensembles (A_i) est Ω).

Remarques :
_ $(A_1, \ldots, A_p)$ est un S.C.E. signifie que l'on a toujours un et un seul de ces événements qui se produit
_ Si $(A_1, \ldots, A_p)$ est un système complet d'événements, alors $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_p) = 1$.
En effet, $P(A_1 \cup \ldots \cup A_p) = P(A_1) + \ldots + P(A_p)$ (car ils sont incompatibles)
Or $A_1 \cup \ldots \cup A_p = \Omega$ et $P(\Omega) = 1$, d'où la formule.
_ Si $A \neq \varnothing$ et $A \neq \Omega$, A et $\overline{A}$ forment un système complet d'événements.
_ On peut représenter un S.C.E. par les branches d'un arbre pondéré. Chaque branche partant de la racine est pondérée par la probabilité de l'événement.
Les branches suivantes sont pondérées par les probabilités conditionnelles.
La somme des probabilités partant d'un sommet vaut toujours 1.

Exemple : Une urne contient 4 boules rouges et 4 boules vertes. On tire 3 boules successivement et sans remise. (R_1, V_1) est un S.C.E. (R_2, V_2) en est un autre
Arbre



1.3 Formule des probabilités composées

Propriété : Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements telle que $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$.
Alors $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$

Démonstration : par récurrence sur n :
_ pour n=2 $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_2}(A_1)$ (d'après paragraphe 3.1)
_ supposons que $P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$
Alors $P((\cap_{i=1}^{n+1} A_i) = P((A_1 \cap \ldots \cap A_n) \cap A_{n+1}) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n}(A_{n+1})$
$= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n) \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n}(A_{n+1})$
La propriété est héréditaire.

Remarque : Sur un arbre, cela signifie que la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités du chemin.

Exemple : Exemple précédent. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules rouges, puis une boule verte ? $P(R_1 \cap R_2 \cap V_3) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times P_{R1 \cap R2}(V_3) = \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{7}$.

1.4 Formule des probabilités totales

Propriété : Formule des probabilités totales :
Soit Ω un univers muni d'une loi de probabilité P. Soit A_1, A_2, ..., A_p un S.C.E de Ω.
tel que $\forall\ i \in \{1, .., p\}$, $P(A_i) \neq 0$.
Alors, pour tout événement B, $P(B) = P_{A1}(B)P(A_1) + P_{A2}(B)P(A_2) + ... + P_{Ap}(B)P(A_p)$.

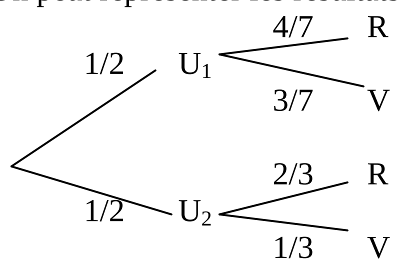
$$= \sum_{i=1}^{p} P_{Ai}(B)P(A_i)$$

Démonstration :
Comme $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_p = \Omega$ $\quad B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ... \cup (A_p \cap B)$.
De plus, comme les A_i sont incompatibles, les $A_i \cap B$ aussi.
Donc $P(A) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_p \cap B)$... d'où la formule.

Remarque :
En terme d'arbre, cela signifie que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins.
La formule des probabilités sert
_ lors d'une expérience aléatoire en deux étapes, quand on cherche la probabilité du résultat de la deuxième étape (en prenant comme S.C.E. les résultats de la $1^{ère}$ étape).
_ lors d'une expérience aléatoire en p étapes, pour trouver les relations entre l'étape n et l'étape n + 1 (voir paragraphe 1.5)

Exemple :
On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
U_1 contient 4 boules rouges et 3 boules vertes. U_2 contient 2 boules rouges et 1 boule verte.
On choisit une urne au hasard, puis une boule au hasard dans une urne.

On peut représenter les résultats sous forme d'un arbre :



(U_1, U_2) est n S.C.E.. D'après la formule des probabilités totales :
$P(R) = P_{U1}(R)P(U_1) + P_{U2}(R)P(U_2) = \frac{4}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{13}{21}$

1.5 Application aux marches aléatoires

Lorsqu'un système peut avoir plusieurs états et passe d'un état à un autre de manière aléatoire, on cherche la probabilité d'être à chaque état après n étapes.
En prenant comme S.C.E. les états possibles à l'étape n, la F.P.T. permet de déterminer les relations entre les probabilités à l'étape n et les probabilités à l'étape n + 1. On obtient ainsi des formules de récurrence sur des suites qu'il faut étudier. (rappel : la somme des probabilités à l'étape n est égale à 1).

Exemple : Un jeton se déplace entre deux points A et B.
A l'instant 0, il se situe en A.

A l'instant n, s'il se situe en A, il a une probabilité de $\frac{2}{3}$ d'y rester à l'instant n + 1

s'il se situe en B, il a une probabilité de $\frac{3}{4}$ d'y rester à l'instant n + 1.

On note p_n la probabilité d'être en A à l'instant n et q_n la probabilité d'être en B à l'instant n.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \frac{5}{12} p_n + \frac{1}{4}$. Exprimer p_n et q_n en fonction de n.

Soit A_n = "le jeton est en A à l'instant n" et B_n = "le jeton est en B à l'instant n".

- p_n : A_n
  - $2/3$: A_{n+1}
  - $1/3$: B_{n+1}
- q_n : B_n
  - $1/4$: A_{n+1}
  - $3/4$: B_{n+1}

A_n et B_n forment un S.C.E.

D'après la F.P.T. $p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) = p_n \times \frac{2}{3} + q_n \times \frac{1}{4}$

Or $q_n = 1 - p_n$ donc $p_{n+1} = p_n \times \frac{2}{3} + (1 - p_n) \times \frac{1}{4} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) p_n + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} p_n + \frac{1}{4}$.

(p_n) est une suite arithmético-géométrique. Point fixe : $c = \frac{5}{12} c + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{12} c = \frac{1}{4}$ $c = \frac{12}{4 \times 7} = \frac{3}{7}$

$v_n = p_n - \frac{3}{7}$ est géométrique de raison $q = \frac{5}{12}$ $v_n = \left(\frac{5}{12}\right)^n v_0$ $p_n - \frac{3}{7} = \left(\frac{5}{12}\right)^n \left(1 - \frac{3}{7}\right)$ $(p_0 = 1)$

$p_n = \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n$ $q_n = 1 - p_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

1.6 Formule de Bayes

Rappel : Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) P_A(B)}{P(B)}$

Propriété : Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements. Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$. Alors $\forall i_0 \in \{1,..,n\}$ $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0}) P_{A_{i_0}}(B)}{\sum\limits_{i \in \{1,..,n\}} P(A_i) P_{A_i}(B)}$

Démonstration : $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(B \cap A_{i0})}{P(B)} = \dfrac{P(A_{i_0}) P_{A_{i_0}}(B)}{\sum\limits_{i \in \{1,..,n\}} P(A_i) P_{A_i}(B)}$ d'après la F.P.T.

Remarque : La formule de Bayes permet de déterminer la "probabilité des causes" :
De plusieurs manières différentes $(A_1, \ldots, A_p)$, on peut obtenir un résultat B.
Si on obtient ce résultat B, on veut savoir si c'est par A_1 ou A_2 ou ….

Exemple : On dispose d'un test pour dépister une maladie.
La probabilité qu'un individu malade ait un test positif est 0,99.
La probabilité qu'un individu non malade ait un test négatif est 0,99.

On estime qu'une personne sur cinq cents est atteinte par la maladie.
Une personne a un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?
M = « Etre malade » T = « test positif »

$$P_T(M) = \frac{P(M) \times P_M(T)}{P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M})P_{\overline{M}}(T)} = \frac{\frac{1}{500} \times \frac{99}{100}}{\frac{1}{500} \times \frac{99}{100} + \frac{499}{500} \times \frac{1}{100}} = \frac{99}{99 + 499} = \frac{99}{598} \approx 0,165.$$

Conclusion : Si le test est positif, une personne a seulement 16% de risque d'être malade.

2. Indépendance en probabilité

Définition : Soient A et B deux événements.
On dit que A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Remarques
_ si $P(A) \neq 0$ A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ (le fait que A soit réalisé ou non n'influe pas sur la probabilité de B)
En effet : $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$
_ on utilise en général le sens : A et B sont indépendants $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Propriété :
Si A et B sont des évènements indépendants, alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration :
_ si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$
A et B ont des rôles analogues, donc $\overline{A}$ et B sont également indépendants
_ A et B sont indépendants, donc A et $\overline{B}$ sont indépendants, donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exemple : Dans une urne, il y a 5 boules notées de A à E.
On tire successivement deux boules dans cette urne.
A_1 : « on tire la boule A au premier tirage »
B_2 : « on tire la boule B au deuxième tirage »

<u>Avec remise :</u>
$P(A_1) = \frac{1}{5}$
$P(B_2) = \frac{5 \times 1}{5 \times 5} = \frac{1}{5}$
$P(A_1 \cap B_2) = \frac{1 \times 1}{25} = \frac{1}{25}$
$P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)P(B_2)$
A_1 et B_2 sont indépendants

<u>Sans remise :</u>
$P(A_1) = \frac{1}{5}$
$P(B_2) = \frac{4 \times 1}{5 \times 4} = \frac{1}{5}$
$P(A_1 \cap B_2) = \frac{1 \times 1}{20} = \frac{1}{20}$
$P(A_1 \cap B_2) \neq= P(A_1)P(B_2)$
A_1 et B_2 ne sont pas indépendants

Définition :
Soient A_1, A_2,..., A_n n événements.
On dit que A_1, ..., A_n sont indépendants (ou mutuellement indépendants) si pour tout partie J non vide de I, $P(\cap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$

Remarque : A RETENIR
Si A_1, ..., A_n sont indépendants, alors $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)....P(A_n)$
(cas particulier de la définition avec J = {1,...,n}.)

Application :
On considère une expérience aléatoire à plusieurs étapes.
Si les étapes sont indépendantes (ex : tirages avec remise), alors les événements liés à des étapes différentes sont indépendants.
Dans le cas de tirages sans remise, les étapes ne sont pas indépendantes.

Exemple :
On lance n fois une pièce dont la probabilité de faire face est $\frac{2}{3}$.
Soit A = « On obtient le premier face au n-ème lancer »
Notons F_i = {On obtient face au i-ème lancer ». Alors $A = \overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap ... \cap \overline{F_{n-1}} \cap F_n$
Les lancers sont indépendants, donc F_1, …, F_n sont indépendants.
Donc $P(A) = P(\overline{F_1})P(\overline{F_2})...P(\overline{F_{n-1}})P(F_n) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \ldots \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3^n}$.

Résumé : Probabilité d'une réunion / d'une intersection :

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$ si événements **incompatibles**
formule du crible sinon

$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_n)$ si événements **indépendants**
$P(A_1) \times P_{A1}(A_2) \times \ldots \times P_{A1 \cap \ldots \cap An-1}(A_n)$ sinon.