

Chapitre 6 : Ensembles – Dénombrements

1. Vocabulaire des ensembles

1.1 Ensemble et sous-ensemble

Un ensemble E est constitué d'éléments.

Si un élément x appartient à E , on note $x \in E$.

L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé ensemble vide, noté \emptyset .

Ex : $E = \{1,2,3\}$ $3 \in E, 5 \notin E$.

$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 4\}$ $F =]-\infty ; 2] \cup [2 ; +\infty[$ $G = \mathbb{R}[x]$

Définition :

Soient E et F deux ensembles.

On dit que E est inclus dans F si tout élément de E est un élément de F . On dit aussi que E est un sous-ensemble de F , ou une partie de F .

On note $E \subset F$.

Exemples : $\{3,4,5\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Remarque : $E \subset F$ signifie que si $x \in E$, alors $x \in F$.

Définition :

L'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble de E est noté $\mathcal{P}(E)$. C'est l'ensemble des parties de E .

Ex : $E = \{1,2,3\}$

$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

1.2 Complémentaire, intersection et réunion

Définition :

Soit E un ensemble et $A \subset E$.

On appelle complémentaire de A dans E noté \overline{A} (ou $E \setminus A$) l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A . $\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$.

Exemple : $A = [2 ; +\infty[$ dans \mathbb{R} . $\overline{A} =]-\infty ; 2[$.

Règles de calcul : Soit E un ensemble

– $\overline{\overline{E}} = E$ et $\overline{(\emptyset)} = E$

– si $A \subset E$, $\overline{\overline{A}} = A$

– si $A \subset E$ et $B \subset E$, $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

Attention, le contraire de "Aucun" est "Au moins un"
le contraire de "Tous" est "Au moins un n'est pas".

Ex : $A = \text{"Tous les élèves sont des garçons"}$

$\overline{A} = \text{"Au moins un élève est une fille"} \neq \text{"Tous les élèves sont des filles"}$.

Définitions :

Soient A et B deux parties de E

_ l'intersection de A et B , notée $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et à B .

_ la réunion de A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ou dans B (c'est-à-dire dans au moins un des deux ensembles A et B).

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x$ appartient à A **et** à B

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x$ appartient à A **ou** $x \in B$ (au moins un des deux)

Exemple : Si $A = \{1,2,5\}$ et $B = \{1,5,7\}$ $A \cap B = \{1,5\}$ $A \cup B = \{1,2,5,7\}$..

Remarques :

_ Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.

_ $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$

_ si $A \subset B$, $A \cap B = A$, $A \cup B = B$

Règles de calcul : A , B et C sont des parties de E .

_ $A \cap E = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap A = A$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

_ $A \cup E = E$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup A = A$, $A \cup \overline{A} = E$.

_ $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$

_ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

_ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributivité)

Propriété : Lois de Morgan

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Remarque : On peut définir de la même manière l'ensemble $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p$ aussi noté $\bigcup_{i=1}^p A_i$ et l'ensemble $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p$, aussi noté $\bigcap_{i=1}^p A_i$

$x \in \bigcup_{i=1}^p A_i \Leftrightarrow x$ appartient à au moins un des ensembles

$x \in \bigcap_{i=1}^p A_i \Leftrightarrow x$ appartient à tous les ensembles.

1.3 Produit cartésien de deux ensembles

Définition :

Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples constitués d'un élément de E et d'un élément de F .

A retenir : $(x, y) \in E \times F$ signifie que $x \in E$ et $y \in F$.

Remarque : $E \times E$ est noté E^2 De manière analogue, on peut définir $E \times \dots \times E = E^n$.

Ex : $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ signifie que $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$.

2. Dénombrement

2.1 Ensembles finis

A partir de maintenant, on considère des ensembles finis.

Dénombrer un ensemble E , c'est déterminer le nombre de ses éléments, c'est-à-dire son cardinal.

Soit E un ensemble à n éléments.

Pour choisir un élément au hasard dans E , il y a n choix possibles.

Remarque : Attention à toujours bien se poser la question :

"Qu'est-ce qu'on choisit ? Parmi quoi ?"

Exemple : On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Combien de possibilités pour choisir un cœur ?

On choisit une carte parmi les 8 cœurs. Donc 8 possibilités.

Propriété : Soit E un ensemble et A et B deux parties de E .

$$\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$$

$$\text{si } A \text{ et } B \text{ sont disjoints, } \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

Choix d'éléments dans des ensembles différents :

Propriété :

Soient E et F deux ensembles finis. Si E a n éléments et si F a p éléments, alors $E \times F$ a $n \times p$ éléments.

Donc, pour choisir au hasard un élément de E et un élément de F , il y a $n \times p$ possibilités.

Exemple :

Dans une salle, il y a 15 hommes et 10 femmes.

Combien de possibilités pour choisir un couple de danseurs ?

Choix d'un homme : 15 d'une femme : 10

En tout : $15 \times 10 = 150$.

Choix d'éléments dans le même ensemble : Deux questions à se poser :

_ les éléments doivent-ils être différents, ou peuvent-ils être égaux ? (= avec remise ou sans remise)

_ s'ils sont tous différents, l'ordre dans lequel on les choisit importe-t-il ? (tirages simultanés ou successifs ?)

Remarques :

_ Attention, dans le cas où on peut choisir plusieurs fois le même élément, alors on est obligé de tenir compte de l'ordre (dans l'optique de l'équiprobabilité)

Ex : on lance 2 pièces. 4 possibilités : PP, PF, FP, FF

_ Dans le cas de tirages successifs sans remise, si l'ordre n'intervient pas dans les questions, on peut considérer que les tirages sont simultanés.

Exemple : Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4.

a) On tire deux boules en remettant la première (ordre, avec remise)

Cas possibles : 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 4-1, 4-2, 4-3, 4-4
(4 choix pour la 1^{ère}, 4 pour la 2^{ème} : $4 \times 4 = 16$ poss.)

b) On tire deux boules successivement sans remettre la première (ordre, sans remise)

Cas possibles : 1-2, 1-3, 1-4, 2-1, 2-3, 2-4, 3-1, 3-2, 3-4, 4-1, 4-2, 4-3 (12 poss.)
(4 choix pour la 1^{ère}, 3 pour la 2^{ème} : 12 poss.)

c) On tire deux boules ensemble : pas d'ordre entre les boules

Cas possibles : 1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4 (6 poss.)
(comment dénombrer sans les écrire tous ?)

2.2 p- listes d'un ensemble à n éléments

Définition :

Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$.

Une p-liste est une liste ordonnée de p éléments non forcément distincts de E.

(c'est-à-dire un élément (x_1, \dots, x_p) de E^p).

Exemple : $E = \{1,2,3,4\}$ (1,4,1), (2,1,3), (1,2,3) ... sont des 3-listes de E.

Propriété : Si E a n éléments, il y a n^p p-listes possibles.

Application aux dénombrements :

Si on choisit p éléments non distincts et avec ordre dans un ensemble à n éléments (exemple : tirages successifs avec remise, lancers de plusieurs dés, de plusieurs pièces, ...), il y a n^p résultats possibles.

Démonstration :

Pour choisir un élément (x_1, \dots, x_p) de E^p Il y a n possibilités pour x_1 , n pour x_2 , ..., n pour x_p .

En tout : $n \times n \times \dots \times n = n^p$.

Exemple :

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie.

A chaque lancer, il y a deux résultats possibles.

En tout $2^{10} = 1024$ résultats possibles.

2.3 Arrangements

Définition : Soit E un ensemble à n éléments et $p \leq n$.

Un arrangement à p éléments de E est une liste ordonnée d'éléments distincts de E.

Définition :

Si $p \leq n$, on note A_n^p le nombre d'arrangements à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Propriété : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \leq n$, $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ ($= n(n-1)\dots(n-p+1$

Application aux dénombrements :

Soit E un ensemble à n éléments. Si on choisit p éléments distincts et ordonnés (exemple : tirages successifs sans remise), il y a A_n^p résultats possibles.

Démonstration : Choix du premier : n possibilités

Choix du deuxième : n - 1 possibilités

....

Choix du p-ème : n - (p - 1) possibilités (p - 1 sont déjà pris)

Donc $A_n^p = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - (p - 1))$

$$= \frac{n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1) \times (n - p) \times \dots \times 2 \times 1}{(n - p) \times \dots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

Exemple : Une course de chevaux compte 7 chevaux au départ. Combien de trios gagnants sont possibles ?

On choisit trois chevaux parmi 7, et l'ordre intervient.

Il y a $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ résultats possibles.

2.4 Permutations

Définition :

Soit E un ensemble à n éléments.

On appelle permutation de E tout arrangement à n éléments de E.

(une permutation est donc une manière d'ordonner les éléments de E).

Propriété : Si E est un ensemble à n éléments, il y a n! permutations de E (c'est-à-dire il y a n! manières d'ordonner les éléments de E).

$$\text{Démonstration : } A_n^n = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Exemple : Un championnat à 6 équipes est réalisé. Combien y-a-t-il de classements possibles ?

On cherche le nombre de manières d'ordonner un ensemble à 6 éléments. Il y a $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ classements possibles.

2.5 Combinaisons

Définition : Soit E un ensemble à n éléments. Soit $p \leq n$.

On appelle combinaison de p éléments de E une partie de E à p éléments.

Remarque : Une combinaison est un ensemble d'éléments distincts et non ordonnés.

Définition : Soient p et n tels que $0 \leq p \leq n$

$\binom{n}{p}$ (« p parmi n ») est le nombre de combinaisons à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Remarques : 1) $\binom{n}{p}$ est appelé un coefficient binomial.

2) Dans certains livres, on trouve encore l'ancienne notation C_n^p .

$$\text{Propriété : } \forall p \leq n, \binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n - p)!}$$

Démonstration :

Choisir un arrangement à p éléments, c'est choisir une partie à p éléments de E , puis choisir un ordre sur ces p éléments.

$$\text{Donc } A_h^p = \binom{n}{p} \times p! \quad \binom{n}{p} = \frac{A_h^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\text{Exemple : } \binom{7}{2} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

$$\text{Propriété : } \forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n$$

$$\text{Démonstration : } \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1, \binom{n}{n} = \frac{n!}{0!n!} = 1 \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n$$

(à l'oral cohérence avec les ensembles)

Application aux dénombrements :

Soit E un ensemble à n éléments.

Si on choisit sans les ordonner p éléments dans l'ensemble (ex : tirages simultanés), alors il y a $\binom{n}{p}$ résultats possibles.

Exemple :

Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 3 cartes.

On choisit donc 3 éléments parmi 32.

$$\text{Nombre de résultats possibles : } \binom{32}{3} = \frac{32!}{29!3!} = \frac{32 \times 31 \times 30}{3 \times 2} = 16 \times 31 \times 10 = 4960$$

Remarque :

Lorsqu'on répète la même épreuve n fois, et qu'on choisit k épreuves parmi ces n épreuves, il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.

Ex : On lance 5 fois un dé.

Combien de résultats en tout ? avec exactement 2 "trois" à l'arrivée ?

En tout : 6^5 possibilités

Avec 2 "trois" à l'arrivée :

$$\text{Choix des places des "trois" : } \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ possibilités}$$

(33..., 3.3., 3..3., 3...3, .33., .3.3., .3..3, ..33., ..3.3, ...33)

Choix des trois autres dés : $5 \times 5 \times 5 = 125$

Donc 1250 possibilités.

Conclusion :

Choix de p éléments dans un ensemble de n éléments

Eléments distincts

Avec ordre : A_p^n possibilités
(tirages successifs sans remise)

Sans ordre : $\binom{n}{p}$ possibilités
(tirages simultanés)

Eléments non distincts : n^p possibilités (l'ordre compte)
(tirages successifs avec remise)

2.6 Propriétés des coefficients binomiaux

Propriété : si $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

Démonstration :

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-(n-p))!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

Propriété : Formule du triangle de Pascal

Pour tous entiers p et n tels que $1 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} &= \frac{n!}{(p-1)!(n-(p-1))!} + \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)(n-p)!} + \frac{n!}{p \times (p-1)!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} \left(\frac{1}{n-p+1} + \frac{1}{p} \right) \\ &= \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} \frac{p+n-p+1}{(n-p+1)p} = \frac{n+1!}{p!(n+1-p)!} = \binom{n+1}{p} \end{aligned}$$

Illustration : le triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccc} & p-1 & p \\ n-1 & \binom{n-1}{p-1} & + \binom{n-1}{p} \\ n & & = \binom{n}{p} \end{array} \quad \text{on ajoute les deux termes de la ligne précédente}$$

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Propriété (formule du binôme de Newton)

Pour tous nombres réels a et b et pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Démonstration : par récurrence sur n (assez complexe)

Remarques : _ Pour trouver les coefficients successifs, il suffit de lire la ligne correspondante du triangle de Pascal.

_ On a aussi : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Exemples :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1 + 1)^n = 2^n$$

2.7 Nombre de parties d'un ensemble à n éléments

Propriété : Si $\text{card}(E) = n$, avec $n \in \mathbb{N}$ alors $\text{card}(P(E)) = 2^n$.

Démonstration :

Soient (x_1, x_2, \dots, x_n) les éléments de E.

Pour choisir une partie A de E, il faut choisir pour chaque élément, s'il appartient à A ou non.

Il y a deux possibilités pour x_1 , 2 pour x_2 , ..., 2 pour x_n . En tout 2^n possibilités.