Chapitre 5 : Convergence d'une suite numérique

1. Limite d'une suite

1.1 Définitions

Remarque : Si x_0 et x sont des réels,
$|x - x_0|$ est la distance entre les nombres x_0 et x.
$|x - x_0| \leq A$ signifie que x est une valeur approchée de x_0 à A près.

Définition : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et L un nombre réel.
On dit que (u_n) converge vers L si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel on a $|u_n - L| \leq \varepsilon$: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - L| \leq \varepsilon$.

Définition : Une suite qui ne converge pas est appelée suite divergente.

Remarque : $|u_n - L| \leq \varepsilon$ signifie que u_n est une valeur approchée de L à ε près.

Exemples :
La suite $u_n = \frac{1}{n} + 2$ converge vers 2
La suite $u_n = n^2$ est divergente, la suite $u_n = (-1)^n$ est divergente.

Définition : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On dit que u tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ si, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang n_0 à partir duquel on a : $u_n \geq A$, c'est-à-dire :
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A$.
De même, on dit que u tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ si, pour tout réel A, il existe un rang n_0 à partir duquel on a : $u_n \leq A$.
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq A$.

Exemples : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} -3n = -\infty$

1.2 Limites usuelles

Propriété (admise) :
$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et plus généralement $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$ si $k \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$

Propriété (admise) : Soit $q \in \mathbb{R}$.
_ si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
_ si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
_ si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
_ si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Exemples : $\lim_{n \to +\infty} 0{,}999^n = 0$, $\lim_{n \to +\infty} 1^n = 1$, $\lim_{n \to +\infty} 1{,}001^n = +\infty$!!

1.3 Opérations sur les limites

Propriété (admise) :

$\lim_{n \to +\infty} u_n$	$\lim_{n \to +\infty} v_n$	$\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n)$	$\lim_{n \to +\infty} u_n v_n$	$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n}$
L	L'	L + L'	LL'	si $L' \neq 0$, $\frac{L}{L'}$ si L' = 0 : si $L \neq 0$: ∞ si L = 0 : F.I.
L	∞	∞	si $L \neq 0$, ∞ si L = 0, F.I.	0
∞	L'	∞	si $L' \neq 0$, ∞ si L' = 0, F.I.	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Remarque :
Pour les limites du type "∞", c'est l'étude du signe qui permet de conclure.

Exemples : $u_n = \frac{1}{n + \ln(n)}$ $\lim_{n \to +\infty} n + \ln(n) = +\infty$ $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

$v_n = \frac{e^n}{-1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$ $\lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty$ $\lim_{n \to +\infty} -1 + \frac{1}{\sqrt{n}} = -1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^n}{-1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} = -\infty$

$w_n = n - \ln(n)$: F.I. $z_n = \frac{n}{\ln(n)}$: F.I. ….

Propriété : Soient a et b des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Soit (u_n) une suite et f une fonction telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n)$ est définie.
Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$ et si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ alors $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = b$.

Exemple : $v_n = e^{-n+1}$ $\lim_{n \to +\infty} -n + 1 = -\infty$ $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} e^{-n+1} = 0$

1.4 Méthodes pour éliminer une forme indéterminée :

Une forme indéterminée ne signifie pas que la limite n'existe pas, mais que la forme ne permet pas de conclure immédiatement.
Type : "$+\infty - \infty$" "$0\times\infty$" "$0/0$" "∞/∞"

Il faut donc, de manière générale, transformer l'expression.
Plusieurs méthodes :

_ Factoriser ce qui est développé / Développer ce qui est factorisé…

_ Utiliser les formules de transformation : ln(a) + ln(b) = ln(ab), etc…, forme conjuguée pour les racines carrées

Exemple : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ F.I.

$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \dfrac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$

$\dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

_ Factoriser par le terme estimé "le plus fort"

Ex : 1) $u_n = 3^n - 2^n$ (F.I.)

$= 3^n\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$ $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} 5n^2 - 3n + 1$: F.I. $5n^2 - 3n + 1 = n^2\left(5 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 5n^2 - 3n + 1 = +\infty$

_ Utiliser les croissances comparées (voir plus loin)

_ Utiliser les équivalents (voir plus loin).

1.5 Croissances comparées

Propriété : Croissances comparées

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^n}{n} = +\infty$ et si a > 1, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a^n}{n} = +\infty$

De manière générale : si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$,

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)^\alpha}{n^\beta} = 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha n}}{n^\beta} = +\infty$ (a > 1) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a^n}{n^\beta} = +\infty$

Exemples : $u_n = n^2 - \ln(n) = n^2\left(1 - \dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

$v_n = 3^n - n^3 = 3^n\left(1 - \dfrac{n^3}{3^n}\right)$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3}{3^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

2. Théorèmes de convergence

2.1 Limites et ordre

Propriété :
Soit (u_n) une suite qui converge vers un nombre réel L.
Si a et b sont tels que $a < L < b$, alors il existe un rang n_0 à partir duquel $a < u_n < b$.

$$(\exists n_0, \forall n \geq n_0, a < u_n < b).$$

Théorème de comparaison :
Soient u et v sont deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
_ Si u et v convergent alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
_ Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
_ Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple : soit $u_n = n + (-1)^n$ on ne peut conclure avec les théorèmes généraux.
$\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n \geq -1$ donc $u_n \geq n - 1$
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 1 = +\infty$, par théorème de comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes)
Soient u, v, w trois suites et L un réel.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L$
Alors la suite u est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Remarque : Le théorème des gendarmes donne à la fois la convergence et la valeur de la limite.

Exemple : $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$
Pour $n \geq 1$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ $\quad 2 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{1}{n}$
$\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

2.2 Limites et suites monotones

Théorème :
_ Toute suite croissante et majorée converge. (et toute suite croissante qui ne converge pas tend vers + ∞).
_ Toute suite décroissante et minorée converge (et toute suite décroissante qui ne converge pas tend vers - ∞).

Remarque : Attention, ce théorème nous donne l'existence d'une limite, mais ne nous donne pas la valeur de la limite !

Exemple : Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$
On a vu dans le chapitre 3 que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$, et on a montré qu'elle était croissante.
u est croissante et majorée par 2 donc u converge vers un nombre réel L et $L \leq 2$.

2.3 Limites et suites extraites

Propriété : Soit (u_n) une suite et L un réel ou + ∞ ou - ∞.
Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers L, alors les suites $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, (u_{n+2}) n $\in \mathbb{N}$, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$,$(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent aussi vers L.

Définition : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle point fixe de f tout réel x tel que f(x) = x.

Utilisation classique : Soit (u_n) une suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
Si (u_n) est convergente vers un nombre L.
alors on peut montrer en général (en utilisant les opérations élémentaires) que $f(u_n)$ converge vers f(L).
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = L$, on a : L = f(L). Donc L est un point fixe de f.
Donc si (u_n) converge, elle converge vers un point fixe de f.

Remarque : si u_0 est un point fixe de f, alors la suite est constante.

Exemple : Suite de l'exemple précédent : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$
On a vu que (u_n) converge vers un nombre réel L. Donc $\sqrt{2 + u_n}$ converge vers $\sqrt{2 + L}$
Comme (u_{n+1}) converge vers L, on a : $L = \sqrt{2 + L} \Rightarrow L^2 = 2 + L \Leftrightarrow L^2 - L - 2 = 0$.
(-1 racine évidente) $(L + 1)(L - 2) = 0$.
L = 2 ou L = -1 (ne convient pas car $u_0 = 1$ et u croissante). Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Propriété : Soit u une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la <u>même limite</u> L, alors (u_n) converge vers L.

Remarque :
Si $u_n = (-1)^n$ $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$ (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, mais n'ont pas la même limite

2.4 Suites adjacentes

Définition : Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :
(1) (u_n) est croissante
(2) (v_n) est décroissante
(3) $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Remarque : puisque (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, $v_n - u_n$ est décroissante.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$, on a toujours $v_n - u_n \geq 0$ donc $u_n \leq v_n$

Propriété :
Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent toutes les deux, et leur limite est la même.

Schéma

Démonstration :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq v_0$ donc (u_n) est majorée par v_0.
Comme (u_n) est croissante et majorée, (u_n) converge vers une limite L.
De même, (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc elle converge vers une limite L'.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L - L' = 0$ donc $L = L'$

Exemple : soit $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

(1) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ donc u est croissante.

(2) $v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ donc (v_n) est décroissante.

(3) $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Donc (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.
Donc (u_n) et (v_n) convergent donc vers la même limite. $(=\pi^2/6)$

Remarque :
Dans certains exercices, on montre que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites adjacentes. Dans ce cas, on peut conclure qu'elles convergent vers la même limite L, donc que (u_n) converge vers L.

3. Relations de comparaison

3.1 Suites équivalentes / Suite négligeable

Définitions : Soient u et v deux suites qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

_ On dit que u et v sont équivalentes si $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ On note $u_n \sim_{+\infty} v_n$.

_ On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ On note $u_n = o(v_n)$.

Exemples :

$u_n = -2n + 3$, $v_n = n^2$ alors $\frac{u_n}{v_n} = -\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}$ (pour $n \geq 1$) Donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. Donc $-2n + 3 = o(n^2)$

$u_n = n^2 - n$ $v_n = n^2$ $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 - n}{n^2} \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ donc $n^2 - n \sim_{+\infty} n^2$

Remarques :

si $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = L \neq 0$ (ou ∞) alors $u_n =_{+\infty} o(v_n)$

si $\lim_{n \to +\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = \infty$ alors $u_n =_{+\infty} o(v_n)$

si $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = L \in \mathbb{R}$ et $\neq 0$ alors $u_n \sim_{+\infty} v_n$

Propriété : Soient u et v deux suites telles que $u_n \sim v_n$.
Si $\lim_{n \to +\infty} v_n = L$ (fini ou infini), alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = L$.

Pour déterminer la limite d'une suite, on peut donc chercher un équivalent plus simple.

Exemple : $n^2 - n \sim n^2$ donc $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} n^2 - n = +\infty$

Propriété fondamentale : (Equivalent d’une somme)
Si u, v, w sont trois suites telles que : $u_n = v_n + w_n$ avec $w_n =_{+\infty} o(v_n)$ alors $u_n \sim_{+\infty} v_n$

Attention, cette propriété est fausse pour un produit ! (nln(n) n'est pas équivalent à n).

Exemple : Equivalent de $n^2 - 2n + 3$
$-2n + 3 = o(n^2)$ donc $n^2 - 2n + 3 \sim n^2$

3.2 Exemples classiques

Propriété : (croissances comparées)
1) $n^\alpha = o(n^\beta)$ si $\alpha < \beta$
2) $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$ pour tout $\alpha>0$, $\beta>0$.
3) $n^\alpha = o(e^{\beta n})$, $n^\alpha = o(a^n)$ pour tout $\alpha>0$, $\beta>0$, $a > 1$
4) $a^n = o(b^n)$ si $a < b$
(On peut retenir : « une exponentielle (ou une puissance) l’emporte sur n^α, qui l’emporte sur un logarithme »)

Exemples :
1) $\ln(n) = o(\sqrt{n})$, $\sqrt{n} = o(n)$, $n = o(n^2)$, $n^2 = o(2^n)$, $2^n = o(e^n)$, …
2) $u_n = 5^n - n$ Limite ?
(FI) $n = o(5^n)$ donc $u_n \sim 5^n$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty$

Propriété :
Un polynôme en n est équivalent à son monôme de plus haut degré.
Une fraction rationnelle en n est équivalente au quotient de ses monômes de plus haut degré.

Exemple : $\dfrac{5n+3}{n^2-1} \sim \dfrac{5n}{n^2} \sim \dfrac{5}{n}$
$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5n+3}{n^2-1} = 0$.

Attention : Les expressions contenant a^n, $\sqrt{n}$, $\ln(n)$, e^n, $n\,!$…. ne sont pas des polynômes en n !

Propriété :
Soit (v_n) une suite. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ alors :
$\ln(1 + v_n) \sim v_n$ $\qquad e^{v_n} - 1 \sim v_n$

Exemple : Equivalent simple de $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2-1}\right)$
$\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^2-1} = 0$ donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2-1}\right) \sim -\dfrac{1}{n^2-1} \sim -\dfrac{1}{n^2}$

3.3 Opérations sur les équivalents

Propriété : Soient u, v, w, z des suites et α un réel.
_ si $u_n \sim v_n$ alors $u_n w_n \sim v_n w_n$
_ Si $u_n \sim v_n$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $u_n^{\alpha} \sim v_n^{\alpha}$
_ Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim z_n$ alors $\begin{cases} u_n w_n \sim v_n z_n \\ \text{si } w_n \text{ et } z_n \text{ ne s'annulent pas } \dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{z_n} \end{cases}$

Remarque : Attention, ne pas utiliser des règles qui n'existent pas !
$u_n \sim v_n \Rightarrow u_n + w_n \sim v_n + w_n$
$u_n \sim v_n \Rightarrow \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
$u_n \sim v_n \Rightarrow e^{u_n} \sim e^{v_n}$

Exemple :
Equivalent puis limite de $u_n = \dfrac{(n^2 + 2n - 3)(e^{1/n} - 1)}{\sqrt{n^2+1}}$:
$n^2 + 2n - 3 \sim n^2$ $\qquad \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $e^{1/n} - 1 \sim \dfrac{1}{n}$
$n^2 + 1 \sim n^2$ donc $\sqrt{n^2+1} \sim \sqrt{n^2} \sim n$ Donc $u_n \sim \dfrac{n^2 \times \frac{1}{n}}{n} \sim 1$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.