

Chapitre 5 : Convergence Feuille d'exercice n°3

Exercice 1

Pour tout entier non nul n , on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

1) Montrer que $\forall n > 0$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ et $w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$

2) Montrer que les deux suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

3) Que peut-on en conclure sur la nature de u ?

Exercice 2

On considère les suites de termes généraux : $1, n, n^2, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \sqrt{n}, \ln(n), e^n, e^{-n}$.

Déterminer quelle suite est négligeable devant une autre.

Exercice 3

On considère les suites $u_n = \frac{n + \sqrt{n}}{2n^2 - 1}$ et $v_n = \frac{1}{2n}$. Montrer que $u_n \sim_{+\infty} v_n$

Exercice 4

1) Soit u_n une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nu_n = \ln(3)$. Déterminer un équivalent simple de (u_n) .

2) Soit u_n une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - n \leq u_n \leq n^2$.

Déterminer un équivalent simple de u_n .

Exercice 5

Déterminer un équivalent simple de :

1) $u_n = \frac{2n^2 - 3n + 2}{n - n^2}$ 2) $u_n = \exp\left(\frac{3}{n^2}\right) - 1$ 3) $\ln(1 + e^{-n})$

Exercice 6

Déterminer un équivalent simple, puis la limite de :

1) $\frac{\sqrt{n^2 - 3n + 2}}{n - e}$ 2) $(n^2 - 1) \times \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)$ 3) $(\sqrt{n} - 4)^6$

Exercice 7

Déterminer un équivalent, puis calculer les limites des expressions suivantes :

1) $u_n = 2^n - n + 1$ 2) $u_n = \frac{3^{n-1} + 2n}{5^{n+4} - 6n - 7}$ 3) $u_n = 2^n - 4^n$
4) $u_n = n^{2011} - 1, 2011^n$ 5) $u_n = \ln^2(n) - \sqrt{n}$ 6) $u_n = -3\ln(n) + e^n + 5n^4 - 1$