

Chapitre 5 : Convergence : Feuille d'exercice n°2

Exercice 1

Calculer les limites des expressions suivantes :

$$1) u_n = \frac{n}{3^n} \qquad 2) u_n = n^2 e^{-n} \qquad 3) u_n = 2^n - n + 1 \qquad 4) u_n = \frac{n}{\ln(n)}$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = 3$ et vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3} |u_n - 2|$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n - 2| \leq \frac{1}{3^n}$
- 2) En déduire la limite de u_n .
- 3) Déterminer un rang n_0 à partir duquel on est sûr que u_n est une valeur approchée de 2 à 10^{-3} près.

Exercice 3

Soit u la suite définie par : $u_n = n \times \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$ pour $n \geq 1$.

1. a. Montrer que $\forall t \in [0 ; +\infty[, \frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$.

On admet qu'on a également : $\forall t \geq 0, \ln(1+t) \leq t$

- b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2n}{n+2} \leq u_n \leq 2$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 4

Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$ et $u_0 = 3$.

1. Montrer que $\forall n \geq 0, u_n \geq 1$ puis déterminer la monotonie de la suite u .
2. Justifier la convergence de la suite u .
3. Déterminer la limite de u .

Exercice 5

Soit u la suite définie par : $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1 + 5u_n}$ et $u_0 > 0$.

On admet que $\forall n \geq 0, u_n$ existe et $u_n > 0$.

1. a) Montrer que u est une suite monotone.
- b) La suite est-elle convergente ? Si oui, calculer sa limite.
2. Montrer que $\forall n \geq 0, u_{n+1} \leq \frac{2u_n}{5}$ puis que $\forall n \geq 0, u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$.

Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.