

Chapitre 4 : Suites - Feuille d'exercices n°2

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5^n \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

Pour expliciter le terme général de cette suite, on pose $\alpha_n = \frac{u_n}{5^n}$ pour $n \geq 0$

1. Vérifier que $\alpha_{n+1} = \frac{2}{5} \alpha_n + \frac{1}{5} \forall n \in \mathbb{N}$
2. En déduire l'expression de α_n en fonction de n et u_0 puis celle de u_n .

Exercice 2

1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n .

2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que :
$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} + 3u_{n+1} - 2u_n = 0 \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 3

Soit u la suite vérifiant la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$, avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 4$.

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

On considère alors la suite w définie par : $w_n = \ln(u_n) \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite w est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
3. Expliciter w_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

Exercice 4

Soit u la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n} \end{cases}$$
. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;1]$.

Exercice 5

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-4\}$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$. Etudier les variations de f .

2) Soit u la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 4} \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq -1$

Exercice 6

1) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \ln(x)$

a) Etudier les variations de f .

b) Montrer que l'intervalle $[1;2]$ est stable par f .

2) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$

Exercice 7

Soit u la suite définie par : $u_0 = 2; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2 + u_n^2}{2u_n}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{2}$

