Chapitre 4 : Les suites

Introduction :
Une suite (u_n) peut être définie de trois manières :
_ une formule explicite de u_n en fonction de n : Ex : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 3n$
_ la valeur initiale et une formule de récurrence : Ex: $u_0 = 5$;$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 4}{u_n - 1}$
_ de manière implicite : vue plus tard dans l'année.

Il est beaucoup plus simple de connaître le comportement d'une suite quand on a la formule explicite. Malheureusement, la plupart des suites sont définies par une formule de récurrence.
Pbs :
_ Comment passer d'une formule de récurrence à une formule explicite ?
_ Comment étudier une suite sans avoir de formule explicite ?

1. Suites usuelles

Pour certaines suites particulières, on sait passer de la formule de récurrence à la formule explicite. On essaiera de s'y ramener le plus souvent possible.

1.1 Suites arithmétiques

Définition : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est alors appelé la raison de la suite

Remarque : Dans la pratique, pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut montrer que $u_{n+1} - u_n$ est constant.

Propriété :
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$
De manière plus générale, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + (n - p)r$

Démonstration par récurrence sur n :
A faire
De plus, comme $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$ par différence : $u_n - u_p = (n - p)r$

Exemples :
1) A l'année 1, on possède un capital $C_1 = 1000$ euros.
Chaque année, ce capital augmente de 50 euros. Soit C_n le capital au bout de n années.
Déterminer C_n en fonction de n.
$C_{n+1} = C_n + 5$ donc (C_n) est une suite arithmétique de raison 50.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = C_1 + (n - 1)\times 50 = 1000 + 50(n - 1) = 950 + 50n$

2) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{3 - u_n} \end{cases}$. On admet que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{1 - u_n}$
Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. En déduire l'expression de (v_n) puis de (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{1}{1 - u_{n+1}} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1 + u_n}{3 - u_n}} = \dfrac{1}{\dfrac{3 - u_n - 1 - u_n}{3 - u_n}} = \dfrac{3 - u_n}{2 - 2u_n}$

Donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3 - u_n}{2 - 2u_n} - \dfrac{1}{1 - u_n} = \dfrac{3 - u_n}{2 - 2u_n} - \dfrac{2}{2 - 2u_n} = \dfrac{1 - u_n}{2(1 - u_n)} = \dfrac{1}{2}$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 + n \times \dfrac{1}{2}$ $\quad v_0 = \dfrac{1}{1 - u_0} = -\dfrac{1}{2}$ $\quad$ Donc $v_n = \dfrac{n - 1}{2}$

$v_n = \dfrac{1}{1 - u_n} \Leftrightarrow v_n(1 - u_n) = 1 \Leftrightarrow v_n - u_nv_n = 1 \Leftrightarrow -u_nv_n = 1 - v_n \Leftrightarrow u_n = \dfrac{v_n - 1}{v_n}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{\dfrac{n - 1}{2} - 1}{\dfrac{n - 1}{2}} = \dfrac{n - 3}{n - 1}$

1.2 Suites géométriques

Définition : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.
q est alors appelé la raison de la suite géométrique.

Remarque : dans la pratique, si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$, pour montrer qu'une suite est géométrique, on montre que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.

Propriété : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, u_n = u_p \times q^{n-p}$

Démonstration par récurrence sur n :

Remarque : Inversement, toute suite de la forme $u_n = a \times b^n$ est une suite géométrique de raison b.

Exemple :
L'année 1, on possède un capital $C_1 = 1000$ euros. Chaque année le capital augmente de 5%.
Soit C_n le capital à l'année n. Déterminer C_n.
$\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = C_n + 0.05C_n = 1,05C_n$ $\quad (C_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 1,05$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = C_1 \times q^{n-1} = 1000 \times 1,05^{n-1}$

1.3 Suites arithmético-géométriques

Définition :
Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

Propriété :
Si $a \neq 1$, il existe un unique réel c tel que $c = ac + b$. (c est appelé point fixe de la suite.)
La suite $v_n = u_n - c$ est géométrique de raison a. (c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - c = a^n(u_0 - c)$)

Démonstration :
$c = ac + b \Leftrightarrow c - ac = b \Leftrightarrow (1 - a)c = b \Leftrightarrow c = \dfrac{b}{1-a}$ (car $a \neq 1$)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - c = au_n + b - c = au_n + c - ac - c = au_n - ac = a(u_n - c) = av_n$
Donc (v_n) est une suite géométrique de raison a.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a^n \times v_0 \Leftrightarrow u_n - c = a^n(u_0 - c)$.

Exemple : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2$ et $u_0 = 3$.
(u_n) est une suite arithméco-géométrique.
1) Recherche du point fixe : $c = 3c - 2 \Leftrightarrow -2c = -2 \Leftrightarrow c = 1$
2) Donc $v_n = u_n - 1$ est une suite géométrique de raison 3.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^n v_0$ $\quad v_0 = u_0 - 1 = 2$
$u_n - 1 = 3^n \times 2$ $\quad$ donc $u_n = 1 + 2\times 3^n$

Remarque : si u_0 est égal au point fixe, alors la suite est constante. (car $v_0 = u_0 - c = 0$ et (v_n) géométrique donc $v_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donc $u_n = c$).

1.4 Suites linéaires récurrentes d'ordre 2 à coefficients constants

Définition :
Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite linéaire récurrente d'ordre 2 à coefficients constants s'il existe deux nombres réels a et b avec $b \neq 0$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Définition : On appelle équation caractéristique de la suite l'équation : $x^2 = ax + b$

Théorème (admis) :
Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique.
_ Si $\Delta > 0$, soient x_1 et x_2 les racines de l'équation caractéristique. Alors il existe des réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$
_ Si $\Delta = 0$: soit x_0 la racine double de l'équation caractéristique. Alors il existe des réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu)x_0^n$

Remarques : _ on détermine λ (lambda) et μ (mu) en utilisant les premiers termes.
_ le cas $\Delta < 0$ n'est pas au programme.

Exemples :
1) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ $u_0 = 4$ et $u_1 = 5$:
Equation caractéristique : $x^2 = 5x - 6$ $\quad x^2 - 5x + 6 = 0$
2 racine évidente $(x - 2)(x - 3) = 0$ deux racines 2 et 3

Donc u est de la forme : $u_n = \lambda 2^n + \mu\, 3^n$

Recherche de λ et μ : $\begin{cases} u_0 = \lambda 2^0 + \mu\, 3^0 = \lambda + \mu = 4 \\ u_1 = \lambda 2^1 + \mu 3^1 = 2\lambda + 3\mu = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 7 \\ \mu = -3 \end{cases}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7\times 2^n - 3\times 3^n$

2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

Equation caractéristique : $x^2 - 4x + 4 = 0$ $(x - 2)^2 = 0$ une racine double $x_0 = 2$

u est de la forme : $u_n = (\lambda n + \mu)2^n$

$\begin{cases} u_0 = (\lambda 0 + \mu)2^0 = \mu = 1 \\ u_1 = (\lambda 1 + \mu)2^1 = 2(\lambda + \mu) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(-\dfrac{n}{2} + 1\right)2^n$.

2. Comportement d’une suite numérique

2.1 Majorants, minorants

Définition : On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** si et seulement s’il existe un nombre réel M (indépendant de n) tel que, pour tout entier n, $u_n \le M$.
On dit que la suite (u_n) est **minorée** si et seulement s’il existe un nombre réel m (indépendant de n) tel que, pour tout entier n, $u_n \ge m$.
Si la suite (u_n) est minorée et majorée, on dit qu’elle est **bornée**.

Cas classique : Méthode à connaître

Soit u_n une suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On veut montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \le A$ (ou $u_n \ge A$, ou $A \le u_n \le B$).
On procède généralement par récurrence.
Pour l'hérédité ($u_n \le A \Rightarrow u_{n+1} \le A$), deux méthodes :
_ si u_n n'apparaît qu'une fois dans l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut en général utiliser les inégalités pour passer de u_n à u_{n+1}
_ sinon : on étudie les variations de la fonction f. (souvent déjà fait avant)
Par exemple, si f est croissante sur un intervalle I et si $u_n \in$ I, et $A \in$ I alors $u_n \le A \Rightarrow f(u_n) \le f(A)$. $u_{n+1} \le f(A)$. En général, on arrive au résultat.
(Attention à bien vérifier que u_n et A appartiennent à I).

Remarque : Pour montrer que $u_n \le A$, on peut aussi montrer que $u_n - A \le 0$.

Ex :

Soit v la suite définie par : $\begin{cases} v_1 = 2 \\ \forall\, n \ge 1,\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n - 9}{v_n - 4} \end{cases}$ Montrer que $\forall\, n \ge 1$, $v_n \le 3$

Par récurrence :
_ $v_1 = 2 \le 3$ donc vraie au rang 1
_ si $v_n \le 3$ Posons $f(x) = \dfrac{2x - 9}{x - 4}$ alors $\forall\, x \ne 4$, $f'(x) = \dfrac{2(x-4) - (2x-9)}{(x-4)^2} = \dfrac{1}{(x-4)^2} > 0$
Donc f est croissante sur $]-\infty;4[$. v_n et 3 appartiennent à cet intervalle.
Comme $v_n \le 3$ $f(v_n) \le f(3)$ $v_{n+1} \le 3$ donc la propriété est héréditaire
Conclusion : $\forall\, n \ge 1$, $v_n \le 3$.

Définition : Soit f une fonction et I un intervalle. Si $f(I) \subset I$, on dit que I est stable par f.

Remarque : Soit u une suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Si $u_0 \in I$ et si I est stable par f, alors on peut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. (par récurrence, à démontrer à chaque fois).

Ex : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{-x + 5}{x + 1}$ et

(u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) Montrer que l'intervalle [1;2] est stable par f.
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1;2]$.

1) $\forall x \neq -1$, $f'(x) = \dfrac{(-1)(x + 1) - (-x + 5)\times 1}{(x + 1)^2} = \dfrac{-6}{(x + 1)^2}$

x	1		2
f '(x)		–	
f(x)	2	↘	1

$f(1) = \dfrac{4}{2} = 2$ $f(2) = \dfrac{3}{3} = 1$ $f([1;2]) = [1;2]$ donc [1;2] est stable par f.

2) Par récurrence :

_ $u_0 = \dfrac{3}{2} \in [1;2]$

_ supposons que $u_n \in [1;2]$. Comme [1;2] est stable par f, $f(u_n) \in [1;2]$ $u_{n+1} \in [1;2]$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1;2]$.

2.2 Sens de variation d'une suite

Définition :
Une suite (u_n) est dite **croissante**, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
Une suite (u_n) est dite **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$
Une suite **monotone** est une suite soit croissante, soit décroissante.

Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite :

1) Le plus souvent : Etudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

Ex : $u_n = \dfrac{1}{n!}$ pour $n \geq 0$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n + 1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{1 - (n + 1)}{(n + 1)!} = -\dfrac{n}{(n + 1)!} \leq 0$ donc (u_n) est décroissante

2) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (ou $u_{n+1} \leq u_n$) (dans le cas où $u_{n+1} = f(u_n)$)

Ex :

Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrons par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$:

_ pour n = 0 : $u_0 = 0 \quad u_1 = \sqrt{2}$ donc $u_0 \leq u_1$

_ supposons que $u_n \leq u_{n+1}$ alors $u_n + 2 \leq u_{n+1} + 2 \quad \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{u_{n+1} + 2} \quad u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Donc la propriété est héréditaire.

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ la suite est croissante.

Remarques :

Pour montrer l'hérédité, on aurait pu utiliser la fonction $f(x) = \sqrt{x + 2}$.

Sur]- 2; + ∞[$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 2}} > 0$ donc f est croissante.

Donc $u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \quad u_{n+1} \leq u_{n+2}$

_ Attention, pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, "f croissante" n'implique pas "u_n croissante" !