Chapitre 3 : Sommes et Récurrence - Feuille d'exercices n°2

Exercice 1

Soit $n \geq 1$. Calculer : a) $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$ b) $\displaystyle\sum_{0 \leq i \leq j \leq 100} 2^i$ c) $\displaystyle\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 3^{i-j}$

Exercice 2

Soit $n \geq 2$. Simplifier les expressions :

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ b) $\dfrac{(n-2)!}{n!}$ c) $\dfrac{(n+1)!^2}{n!(n+2)!}$

Exercice 3

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 4n - 1$

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On admet que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 3$

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite telle que : $u_1 = 5$ et $\forall\, n \geq 1,\ u_{n+1} \leq \dfrac{2}{3} \times u_n$

Montrer que $\forall\, n \geq 1,\ u_n \leq \dfrac{15}{2} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Exercice 6 *(Inégalité de Bernoulli)*

Démontrer que, pour tout $x \in\ ]-1\,;+\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 7

Démontrer par récurrence les trois sommes du cours non démontrées. ($\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$)

Exercice 8

Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$

Exercice 9

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = 4 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}$.