Chapitre 3 : Sommes et Récurrence - Feuille n°1

Exercice 1

1) Calculer les nombres : $A = \sum_{k=1}^{5} k^2$ $\quad B = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \times (2i+1)$

2) Ecrire sans le symbole $\sum$ et à l'aide de pointillés les expressions ci-dessous :

$C_n = \sum_{k=3}^{n} (2k-3)$ $\quad D_n = \sum_{i=1}^{2n} i^2 \times 3^i$ $\quad E_n = \sum_{j=4}^{n} \frac{j+n}{j}$

(on écrira les deux premiers et les deux derniers termes)

Exercice 2 Ecrire avec le symbole $\sum$

$A = 2^5 + 3^5 + 4^5 + ... + 1000^5$ $\quad B = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + ... + \frac{2^{2011}}{2012}$

$C = \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4} + \frac{a^6}{6} + ... + \frac{a^{30}}{30}$ $\quad D_n = 1 - a + a^2 - a^3 + ... + (-1)^n a^n$

Exercice 3

Soit $n \geq 1$. Calculer les sommes suivantes :

$A_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)$ $\quad B_n = \sum_{k=0}^{n} (6k^2 + 4k + 1)$ $\quad C = \sum_{p=945}^{2011} 3$

$D = \sum_{k=1}^{2n} k^2(2k-1)$ $\quad E_n = \sum_{i=0}^{n} 2^i$ $\quad F_n = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + ... + (-1)^n 3^n$

$G_n = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{3}{10^\alpha}$ $\quad H_n = \sum_{j=0}^{2n} \frac{5 \times 2^j}{3^{j+1}}$ $\quad I_n = \sum_{i=2}^{n+1} 3^{2i+1}$

Exercice 4

A l'aide d'un changement d'indice, déterminer

$S = \sum_{k=20}^{30} (k-20)^2$ $\quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ $(n \geq 1)$ $\quad U_n = \sum_{i=5}^{n} \frac{1}{3^i}$ $(n \geq 5)$

Exercice 5

1) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ et $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$

2) Pour $n \geq 1$, en déduire les valeurs de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Exercice 6

Soient $n \geq 1$ et $p \geq 1$.

a) Calculer $\sum_{(i,j) \in \{1..n\} \times \{1..p\}} (i+j)$ $\quad$ b) Calculer $\sum_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n} 2^{i+j}$