Chapitre 24 : Fonctions à deux variables - Feuille n°2

Exercice 1 (d'après EDHEC 2006)
Soit f la fonction définie pour tout couple (x;y) de $\mathbb{R}^2$ par :
$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1. a) Calculer les dérivées partielles premières de f.
b) En déduire que le seul point critique de f est A = (1/6 ; 1/6) .

2. a) Calculer les dérivées partielles secondes de f .
b) Calculer m = f(1/6;1/6)

3. a) Développer $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$

b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}$.

4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x;y) de $\mathbb{R}^2$, par :
$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$

a) Utiliser la question 3. pour établir que : $\forall (x ;y) \in \mathbb{R}^2 , g(x, y) \geq -\frac{1}{6}$

b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 2 (d'après EDHEC 2005)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 , f(x, y) = x\, e^{x(y^2+1)}$.
1) a) Déterminer les dérivées partielles premières de f.

b) Montrer que le seul point critique de f est : A = (– 1 ; 0) .

Calculer f(-1, 0)

2) a) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \geq xe^x$.
b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$, conclure que f admet un extremum global sur $\mathbb{R}^2$. En quel point est-il atteint ?