Chapitre 23 Intégration sur un segment

1. Primitives d'une fonction continue

1.1 Notion de primitive

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I et telle que F' = f.

Exemple : Soit $f(x) = (2x - 5)e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $F(x) = (x - 3)e^{2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = 1\times e^{2x} + (x - 3)2e^{2x} = (1 + 2x - 6)e^{2x} = f(x)$. Donc F est une primitive de f.

Théorème :
Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur I.
Dans ce cas, si F est une primitive de f sur I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \longmapsto F(x) + k$, avec k réel.

Démonstration :
Existence : admis
_ Soit G une autre primitive de f, alors $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$
Donc G – F est constante sur I : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.
_ Inversement soit G une fonction telle que $G(x) = F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Alors $G'(x) = F'(x) = f$ donc G est une primitive de f.

1.2 Primitives des fonctions usuelles

Si f(x) =	Une primitive F de f est :	sur
$f(x) = 1$	$F(x) = x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	selon α
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(\lvert x\rvert)$ $\ln(x)$ sur $]0;+\infty[$ $\ln(-x)$ sur $]-\infty;0[$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Ex : primitives de $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$: $F(x) = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + k = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2}$

$f(x) = x\sqrt{x} = x^{3/2}$ $\quad F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{3/2+1} = \frac{2}{5}x^{5/2} = \frac{2}{5}x^2x^{1/2} = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$

1.3 Primitives et opérations

Propriété :
Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si U est une primitive de u et V une primitive de v, alors U + V est une primitive de u + v.
Si U est une primitive de u alors αU est une primitive de αu.

Remarque : Attention u*v n'a pas pour primitive U*V !!

Exemples :
$x^2 + e^x \longrightarrow \frac{x^3}{3} + e^x$

Mais x^2e^x n'a pas pour primitive $\frac{x^3}{3}e^x$

Propriété :
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors

Si f est définie sur I par :	Une primitive F de f sur I est :
$f = u' \times u$	$F = \frac{1}{2}u^2$
$f = \frac{u'}{u^2}$ (u ne s'annulant pas sur I)	$F = -\frac{1}{u}$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ (u ne s'annulant pas sur I)	$F = 2\sqrt{u}$
$f = u' \times u^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$	$F = \frac{1}{\alpha + 1}u^{\alpha+1}$
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln(\lvert u \rvert)$
$f = u'e^u$	$F = e^u$

Remarques :
_ Il est souvent utile de multiplier et diviser par un même nombre pour faire apparaître u'.
_ Si vous n'êtes pas sûr de votre primitive, redérivez pour vérifier !

Exemples :
$f(x) = (2x - 1)^3$ Si on pose u(x) = 2x – 1 alors u'(x) = 2.

$= \frac{1}{2} \times 2 \times (2x - 1)^3 = \frac{1}{2}u'(x) \times u(x)^3$

Donc $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}(2x - 1)^4 = \frac{1}{8}(2x - 1)^4$

$g(x) = \frac{3}{5 - 4x}$ sur $]\frac{5}{4}; +\infty[$ si on pose u(x) = 5 – 4x alors u'(x) = -4.

$g(x) = 3 \times -\frac{1}{4} \times \frac{-4}{5 - 4x}$ $G(x) = -\frac{3}{4}\ln(\lvert 5 - 4x \rvert) = -\frac{3}{4}\ln(4x - 5)$

2. Intégrale sur un segment

2.1 Intégrale d'une fonction continue

Propriété - Définition :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b des éléments de I.
Soit F une primitive de f. Alors le nombre F(b) – F(a) est indépendant du choix de F.
Ce nombre est appelé intégrale de f sur entre a et b, et est noté : $\int_a^b f(x)dx$
On a donc : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Démonstration : si G est une autre primitive, $G(x) = F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$
Donc $G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$

Exemple : $\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\times 1^3 - \frac{1}{3}\times 0^3 = \frac{1}{3}$

Remarques :
_ si $a \leq b$, $\int_a^b f(x)dx$ est appelée l'intégrale de f sur [a;b].
_ Attention : $\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{fonction}}dx = [\underbrace{F(x)}_{\text{primitive}}]_a^b$
_ n'oubliez pas de mettre une parenthèse (si besoin) devant F(a)
_ attention, en aucun cas le résultat de $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend de x !

2.2 Interprétation graphique

Définition :
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ;b] ($a \leq b$) et C_f sa courbe représentative.
On appelle aire sous la courbe C_f sur l'intervalle [a; b], l'aire du domaine D limité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation x = a et x = b.
(Le domaine D est l'ensemble des points M(x ;y) tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$)

Propriété :
Soit f une fonction continue et positive sur [a;b]. Alors l'aire sous la courbe de f (exprimée en unités d'aire) est égale à $\int_a^b f(x)dx$.

Ex : $f(x) = x^2$ sur [0;1]. (courbe) $\text{Aire}_{\text{hachurée}} = \frac{1}{3}$ u.a.
Si l'échelle est : 4 cm en abscisse, 6 cm en ordonnées : 1 u.a. = 24 cm^2
Aire $= \frac{1}{3}\times 24 = 8$ cm^2

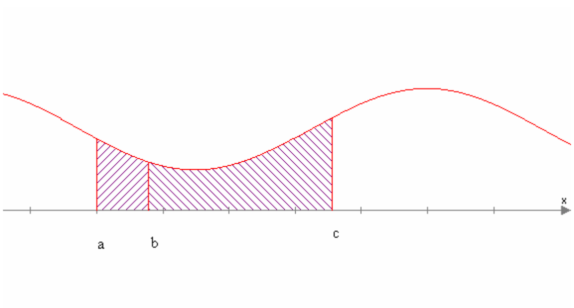
2.3 Propriétés de l'intégrale

Propriété :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c $\in$ I.
Alors $\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$. (relation) de Chasles)

Démonstration : si F est une primitive de f :
$\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_b^a = F(a) – F(b) = - (F(b) – F(a)) = - \int_a^b f(x)dx$
$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c = F(b) – F(a) + F(c) – F(b) = F(c) – F(a)$
$= \int_a^c f(x)dx$.

Interprétation graphique :
Si $a \leq b \leq c$ et si f est positive sur [a;c] :
$A_{a,c} = A_{a,b} + A_{b,c}$



Remarque :
On a donc aussi : $\int_a^c f(x)dx – \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Exemple : Pour $n \geq 1$, soit $I_n = \int_1^n \frac{x}{\ln(x)}dx$. Simplifier $I_{n+1} – I_n$

$I_{n+1} – I_n = \int_1^{n+1} \frac{x}{\ln(x)}dx – \int_1^n \frac{x}{\ln(x)}dx = \int_n^{n+1} \frac{x}{\ln(x)}dx$

Propriété : Linéarité de l'intégrale.
Soit f,g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b $\in$ I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

Démonstration : Si F est une primitive de f et G une primitive de g, alors F + G est une primitive de f + g, donc :
$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = [F(x) + G(x)]_a^b = F(b) + G(b) – (F(a) + G(a)) = F(b) – F(a) + G(b) – G(a)$
$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
λF est une primitive de λf, donc : $\int_a^b (\lambda f(x))dx = [\lambda F(x)]_a^b = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda(F(b) – F(a))$
$= \lambda \int_a^b f(x)dx$

Remarque : Attention, $\int_a^b f(t)g(t)dt \neq \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b g(t)dt$!!

2.4 Intégrales et ordre

Propriété : Positivité de l'intégrale
Soit f une fonction continue sue [a;b], $a \le b$ Si $\forall x \in [a;b], f(x) \ge 0)$ alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

Démonstration : Soit F une primitive de f sur [a;b]. Alors $\forall x \in [a;b]$, $F'(x) = f(x) \ge 0$, donc F est croissante sur [a;b]. Donc $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \ge 0$.

Propriété : Soient f et g deux fonctions continues sur [a ;b].
Si pour tout $x \in [a ;b]$, $f(x) \le g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Démonstration : Posons $h(x) = g(x) - f(x)$ sur [a;b]. Alors $\forall x \in [a;b]$, $h(x) \ge 0$.
Donc par positivité de l'intégrale, $\int_a^b h(x)dx \ge 0$. $\int_a^b (g(x) - f(x))dx \ge 0$
$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0$ $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Définition : Soit f une fonction continue sur [a;b].
Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé la valeur moyenne de f sur [a;b].

Propriété : Inégalité de la moyenne :
Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ;b] $(a \le b)$
S'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a ;b]$, $m \le f(x) \le M$,
alors $m(b - a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b - a)$.

Démonstration : $\forall x \in [a;b]$ $m \le f(x) \le M$
donc $\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx$ $[mx]_a^b \le \int_a^b f(x)dx \le [Mx]_a^b$
$mb - ma \le \int_a^b f(x)dx \le Mb - Ma$ $m(b - a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b - a)$.

Remarques : _ L'inégalité de la moyenne est le même théorème que l'inégalité des accroissements finis, décalé d'un rang.
_ autrement dit : $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$

Propriété : Soit f une fonction continue sur [a;b]. Alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

Démonstration : $\forall y \in \mathbb{R}$, $-|y| \le y \le |y|$ Donc $\forall x \in [a;b]$, $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$
Donc $\int_a^b -|f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$ $-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$ donc
$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

Remarques :
_ Attention, dans toutes ces propriétés, il faut que $a \le b$!
_ pour montrer une inégalité sur une intégrale, on trouve d'abord une inégalité sur la fonction à intégrer (soit avec une constante, soit avec une fonction qu'on sait intégrer), puis on utilise un des théorèmes sur l'ordre.

Exemples : 1) Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$

_ $\forall\, x \in [0;1]$ $\frac{x^n}{1+x^n} \ge 0$ donc $I_n \ge 0$.

_ $\forall\, x \in [0;1]$ $1 + x^n \ge 1$ donc $\frac{1}{1+x^n} \le 1$ $\quad \frac{x^n}{1+x^n} \le x^n$ $\quad$ donc $I_n \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

2) Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \le \frac{1}{k}$.

$\forall\, x \in [k; k+1]$, $k \le x \le k+1$ $\quad \frac{1}{k+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{k}$

Donc, d'après l'inégalité de la moyenne : $\frac{1}{k+1}(k+1-k) \le \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \le \frac{1}{k}(k+1-k)$

$\frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \le \frac{1}{k}$

3. Méthodes pour calculer une intégrale

3.1 Intégrations par parties

Théorème : Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I.
Pour tous réels a et b de I, on a : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

Démonstration : Les fonctions u, v, u' et v' sont continues
De plus : $\int_a^b (u(x)v'(x) + u(x)v'(x))dx = \int_a^b (u(x)v(x))'dx = [u(x)v(x)]_a^b$ d'où la formule.

Remarques :
_ L'intégration par parties permet de calculer l'intégrale d'un produit.
_ Il y a deux choix pour u et v : attention à choisir celui qui simplifie le problème (avec ln -> on dérive le ln, un polynome avec une exponentielle -> on dérive le polynome).
_ il faut parfois faire apparaître le produit : Ex : $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$.
_ pour des suites d'intégrales, une intégration par parties permet souvent de trouver une relation de récurrence.

Exemple :
$I = \int_1^2 (x+1)\ln(x)dx$:
On pose $u(x) = \ln(x)$ $\quad v'(x) = x + 1$
On en déduit $u'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad v(x) = \frac{x^2}{2} + x$ $\quad$ (u et v sont C^1 sur [1 ;2])

$I = \left[\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\frac{1}{x}dx$

$= 4\ln(2) - 0 - \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + 1\right)dx = 4\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_1^2 = 4\ln(2) - (3 - \frac{5}{4}) = 4\ln(2) - \frac{7}{4}$.

3.2 Changement de variables

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b $\in$ I.
Soit g une fonction de classe C^1 sur I et bijective de I sur un intervalle J, telle que g^{-1} est de classe C^1 sur J.
Alors $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = \int_{y=g(a)}^{y=g(b)} f(g^{-1}(y)) \times (g^{-1})'(y)\, dy$

Démonstration : f, g^{-1} et $(g^{-1})'$ sont continues, donc $y \longmapsto f(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y)$ est continue.
Si F est une primitive de f
$\forall y \in J$, $f(g^{-1}(y)) \times (g^{-1})'(y) = F'(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y) = (F \circ g^{-1})'(y)$
Donc $\int_{g(a)}^{g(b)} f(g^{-1}(y)) \times (g^{-1})'(y)\, dy == \left[(F \circ g^{-1})(y)\right]_{g(a)}^{g(b)} = F(g^{-1}(g(b)) - F(g^{-1}(g(a)) = F(b) - F(a)$
$= \int_a^b f(x)dx$

Méthode :
_ On donne y = g(x), où g est bijective. (ou $x = g^{-1}(y)$)
_ on détermine $x = g^{-1}(y)$ (ou y = g(x))
et on remplace dans l'expression x par $g^{-1}(y)$
_ Notation : $x = g^{-1}(y)$ on dérive par rapport à y : $\frac{dx}{dy} = (g^{-1})'(y)$ d'où la notation :
$dx = (g^{-1})'(y)dy$
_ on modifie les bornes : pour x = a y = g(a) pour x = b y = g(b)

Exemple : Calcul de $I = \int_0^1 \frac{x+1}{2x+3}dx = \int_{x=0}^{x=1} \frac{x+1}{2x+3}dx$

On pose $y = 2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$ $dx = \frac{dy}{2}$. quand x = 0 y = 3 quand x = 1 y = 5

$$I = \int_{y=3}^{y=5} \frac{\frac{y-3}{2}+1}{y}\frac{dy}{2} = \int_3^5 \frac{y-1}{4y}dy = \int_3^5 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4y}\right)dy = \left[\frac{y}{4} - \frac{\ln(y)}{4}\right]_3^5 = \frac{5}{4} - \frac{\ln(5)}{4} - \frac{3}{4} + \frac{\ln(3)}{4}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

Propriété : Soit f une fonction continue sur l'intervalle [-a;a].
Si f est paire sur [-a;a], alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
Si f est impaire sur [-a;a], alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Démonstration : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$ (relation de Chasles)
Changement de variables dans la première intégrale : on pose u = - x donc x = -u dx = - du
$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)du$
Si f est paire, $\int_0^a f(-u)du = \int_0^a f(u)du$ donc $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(t)dt$
Si f est impaire, $\int_0^a f(-u)du = \int_0^a -f(u)du = -\int_0^a f(u)du$ donc $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

4. Fonction définie par une intégrale

Propriété : Soit g une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$.
Soit f la fonction définie par sur I par $f(x) = \int_a^x g(t)dt$.
Alors f est une primitive de g sur I.

Démonstration :
si G est une primitive de g sur I, $f(x) = \int_a^x g(t)dt = [G(t)]_a^x = G(x) - G(a)$.
Donc $f'(x) = G'(x) = g(x)$ (car G primitive de g).

Cas général : Soit g une fonction continue sur un intervalle J et u, v deux fonctions dérivables d'un intervalle I sur J. On pose : $\forall x \in I$, $f(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} g(t)dt$.
Alors f est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $f'(x) = v'(x)g(v(x)) - u'(x)g(u(x))$.

Démonstration :
Si G est une primitive de g sur J, $f(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} g(t)dt = [G(t)]_{u(x)}^{v(x)} = G(v(x)) - G(u(x))$.
Donc $f'(x) = v'(x)G'(v(x)) - u'(x)G'(u(x)) = v'(x)g(v(x)) - u'(x)g(u(x))$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{t}dt$

Soit $g(t) = \frac{e^t}{t}$ et G une primitive de g. Alors $f(x) = [G(t)]_{2x}^{3x} = G(3x) - G(2x)$

Donc $f'(x) = 3G'(3x) - 2G'(2x) = 3\frac{e^{3x}}{3x} - \frac{2e^{2x}}{2x} = \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$.