Chapitre 23 : Intégration – Feuille n°3

Exercice (EML 2008)

On considère l'application $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in]0; +\infty[$ par :
$f(t) = t \times \ln(t) - t$.
On considère l'application $G :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1; +\infty[$, par :
$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $]1; +\infty[$ et que, pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$G'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)) \quad \text{et } G''(x) = \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(x-1))$$

A cet effet, on pourra faire intervenir une primitive F de f sans chercher à calculer F.

2. a) Montrer que G' est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

b) Vérifier que $G'(2) > 0$.

c) Montrer que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1; +\infty[$, admet une solution et seule, notée α, et que $\alpha < 2$.

d) En déduire les variations de G.

Chapitre 23 : Intégration – Feuille n°3

Exercice (EML 2008)

On considère l'application $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in]0; +\infty[$ par :
$f(t) = t \times \ln(t) - t$.
On considère l'application $G :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1; +\infty[$, par :
$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $]1; +\infty[$ et que, pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$G'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)) \quad \text{et } G''(x) = \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(x-1))$$

A cet effet, on pourra faire intervenir une primitive F de f sans chercher à calculer F.

2. a) Montrer que G' est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

b) Vérifier que $G'(2) > 0$.

c) Montrer que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1; +\infty[$, admet une solution et seule, notée α, et que $\alpha < 2$.

d) En déduire les variations de G.